FLUIDES DE SECOND ET TROISIEME GRADE EN DIMENSION TROIS : SOLUTION GLOBALE ET REGULARITE

Jean-Marie Bernard

Thèse de doctorat de l'Université PARIS VI

Spécialité :

MATHÉMATIQUES

présentée par

Jean-Marie BERNARD

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université PARIS VI

Sujet de la thèse :

FLUIDES DE SECOND ET TROISIÈME GRADE EN DIMENSION TROIS : SOLUTION GLOBALE ET RÉGULARITÉ

Soutenue le 11 février 1998
devant le jury composé de :

Monsieur	**Cherif AMROUCHE**	Rapporteur
Monsieur	**Jacques BARANGER**	Rapporteur
Monsieur	**Yann BRENIER**	
Monsieur	**Jean-Yves CHEMIN**	
Madame	**Doina CIORANESCU**	
Madame	**Vivette GIRAULT**	Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à Vivette Girault pour la confiance qu'elle m'a témoignée en acceptant de diriger cette thèse. Ses nombreux conseils et son enthousiasme m'ont été d'une aide précieuse et j'ai beaucoup regretté son éloignement géographique ces deux dernières années.

Doina Cioranescu a toujours été disponible pour répondre à mes multiples questions, aussi bien sur la mécanique des fluides que sur des problèmes proprement mathématiques. Son aide a été déterminante dans toutes les démarches qui accompagnent un travail de thèse. Enfin, je n'oublie pas que ses travaux sont le fondement de mon travail. Pour toutes ces raisons, je la remercie très vivement et suis très heureux de sa participation au jury.

Mes remerciements vont aussi à Cherif Amrouche pour avoir accepté de rapporter sur cette thèse, pour son étude très utile sur les fluides de grade trois et pour son accueil chaleureux au laboratoire.

Jacques Baranger a également rapporté sur cette thèse et m'a fait part de remarques très intéressantes. Je suis heureux de le remercier ici.

Je tiens à remercier Yann Brenier, dont j'ai suivi l'enseignement avec beaucoup de plaisir il y a quelques années, pour sa participation au jury.

Je voudrais exprimer mes remerciements très chaleureux à Martine Legras pour avoir assuré de multiples liaisons avec Houston avec beaucoup de dévouement. Combien de fois ai-je fait appel à ses services !

Je voudrais remercier Danièle Boulic, Liliane Ruprecht et Martine Barbelenet pour leur disponibilité et leur efficacité toujours souriantes.

Je suis très reconnaissant à Christian David pour la rapidité et la qualité de son travail, ainsi que pour sa grande gentillesse.

Enfin un grand merci à ma famille et à tous mes amis pour avoir accepté mon fréquent manque de disponibilité.

Résumé

Dans ce travail nous nous intéressons aux problèmes d'évolution des fluides de grade deux et trois, en dimension trois, quant à la question de l'existence globale en temps de la solution faible et de sa régularité. Nous considérons, également, un cas particulier du problème stationnaire des fluides de grade deux, en dimension trois. Nous étudions ces problèmes dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, dans un premier temps simplement connexe, dans un deuxième temps non simplement connexe, cas non envisagé dans les travaux antérieurs.

Dans une première partie, nous montrons que la méthode de décomposition avec base spéciale introduite par D. Cioranescu et E. H. Ouazar, permet de démontrer l'existence globale en temps de la solution faible pour des fluides de grade deux dans le cas général ($\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$), en dimension trois, avec des données petites. Contrairement au cas plus simple $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, récemment étudié par D. Cioranescu et V. Girault, la décroissance exponentielle en fonction du temps de la norme H^1 de la vitesse n'est pas obtenue pour toute donnée. Ce fait, qui a conduit certains auteurs à affirmer, en contradiction avec notre travail, que la méthode de décomposition ne s'applique pas au cas $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, complique substantiellement la démonstration d'existence de la solution. Les résultats de régularité, qui conduisent, en particulier, à une solution au sens classique, sont obtenus moins directement que dans le cas $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, à cause d'une équation de transport beaucoup plus complexe.

La deuxième partie est consacrée au problème stationnaire de grade deux, dans le cas $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, en dimension trois. Par rapport au problème en dimension deux, étudié par E. H. Ouazar, la norme H^3 de la vitesse, en dimension trois, n'est pas bornée pour toute donnée. Cependant, par une méthode spéciale, utilisant conjointement une majoration H^1 de la vitesse, une "pseudo continuité" par rapport à la donnée (effective pour une norme de la vitesse dans H^3 petite) et une inégalité polynômiale (vérifiée par la norme H^3 de la vitesse), nous montrons l'existence, l'unicité, la dépendance continue par rapport à la donnée et la régularité de la solution, pour une donnée petite.

Enfin, la troisième partie étudie le problème des fluides de grade trois, en dimension trois, mais sans supposer une condition qui, dans le travail de C. Amrouche et D. Cioranescu, donnait une majoration H^1 de la vitesse pour toute donnée. Les difficultés, dans le cas du grade trois, sont pratiquement les mêmes que pour le grade deux, aussi la méthode d'étude, dans cette partie, est similaire à celle de la première partie, avec quelques complications, d'ordre technique, supplémentaires.

abstract

This thesis focuses on the time-dependent problems of second and third grade fluids, in three dimensions, as regards global existence in time of the weak solution and its regularity. Also we consider a particular case of the stationary problem of second grade fluids, in three dimensions. We study these problems in a bounded domain of $\mathbb{R}^3$, at first simply-connected, subsequently multiply-connected, a case not considered in previous works.

In the first part, we show that the decomposition method with special basis, introduced by D. Cioranescu and E. H. Ouazar, allows us to prove global existence in time of the weak solution for second grade fluids in the general case ($\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$), in three dimensions, with small data. Contrary to the simpler case, where $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, recently studied by D. Cioranescu and V. Girault, the exponential decay with respect to time of the H^1 norm of velocity is not obtained for all data. This fact, which led some authors to assert, in contradiction to our work, that the method of decomposition does not apply to the case where $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, complicates substantially the proof of the existence of the solution. The regularity results, which lead, in particular, to a classical solution, are less straightforward than in the case where $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ because of a transport equation, which is much more complex.

The second part is devoted to the stationary problem of second grade, in the case where $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, in three dimensions. In relation to the problem in two dimensions, studied by E. H. Ouazar, the H^3 norm of the velocity, in three dimensions, is not bounded for all data. However, by a special method, using together a H^1 bound of the velocity, a "pseudo continuous dependence" with respect to the data (effective for a small H^3 norm of the velocity) and a polynomial inequality (verified by the H^3 norm of the velocity), we show existence, uniqueness, continuous dependence with respect to the data and regularity of the solution, with small data.

Finally, the third part deals with the problem of third grade fluids, in three dimensions, but without assuming a condition, which, in the C. Amrouche and D. Cioranescu work, gave a H^1 bound of the velocity for all data. By a method similar to that of the first part, given that the difficulties are the same, we obtain, with a few more technical complications, the same types of results as for the second grade fluids.

Table des matières

Introduction

La loi classique de Newton (1687)

$$T = -\tilde{p}I + 2\,\nu D, \tag{0.1}$$

où T désigne le tenseur des contraintes, $D = \dfrac{1}{2}(L + L^T)$, avec $L_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$, le tenseur des taux de déformations, $\tilde{p}$ la pression et ν la viscosité, a été longtemps considérée comme universelle pour l'étude des fluides. Soulignant son importance, les équations de Navier-Stokes, issues de cette loi, sont encore très largement étudiées actuellement.

Cependant cette théorie a subi le sort habituel des théories physiques: elle a perdu son caractère universel. En effet, si cette loi permet de décrire le comportement d'une classe importante de fluides, justement appelés fluides newtoniens, tels les gaz, l'eau, l'air, la glycérine, elle est apparue insuffisante pour expliquer certains phénomènes liés à des fluides tels que le bitume, certaines huiles, des polymères, qualifiés, en conséquence, de non-newtoniens. Par exemple, dans le cas d'un écoulement de cisaillement simple, si on applique la loi de Newton, on obtient des différences de contraintes normales nulles, soit $T_{11} - T_{22} = T_{22} - T_{33} = 0$ et une dépendance linéaire de T_{12} par rapport au taux de cisaillement $k = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}$. Or des expériences montrent que certains fluides ne vérifient pas toutes ces propriétés et, de plus, les différences de contraintes normales non nulles sont la cause de phénomènes intéressants comme l'effet “die swell” (gonflement à l'extrusion d'un jet), l'effet de Weissenberg (montée d'un liquide le long d'un cylindre en rotation) et la présence d'un flot secondaire dans des tuyaux de section non circulaire. On a donc été amené à chercher des lois de comportement plus générales que (0.1).

En 1845, Stokes propose la loi:

$$T = f(D) \text{ avec } T = -\tilde{p}I \text{ si } D = 0. \tag{0.2}$$

A partir de cette loi, utilisant le principe d'indifférence matérielle, R. S. Rivlin établit la loi suivante:

$$T = -\tilde{p}I + \lambda_1\, D + \lambda_2\; D^2, \tag{0.3}$$

où λ_1 et λ_2 sont des fonctions de $D_{II} = \dfrac{1}{2} tr\, D^2$ et $D_{III} = dét\, D$ qui sont les deuxième et troisième invariants principaux de D. Avec cette loi, dans le cas d'un écoulement de cisaillement simple, on a $T_{22} - T_{33} \neq 0$ et une dépendance non linéaire de T_{12} par rapport à k. Par contre $T_{11} - T_{22} = 0$. Une classe particulière de tels fluides sont les fluides de Bingham (la boue, la pâte dentifrice, la peinture…). Cependant, en 1954, F. J. Padden et W. Dewit ont montré qu'il existe des polymères vérifiant $T_{11} - T_{22} \neq 0$, restreignant ainsi la généralité de la loi (0.3).

Une autre approche est de partir de la notion de fluide simple incompressible (cf. W. Noll [25]), qui est tel que le tenseur des contraintes $T(t)$, à l'instant t, est une fonctionnelle de l'histoire du gradient de déformation de $-\infty$ à t. Si on admet, pour les fluides, que T est seulement influencé par une très courte histoire de leur gradient de déformation, on est conduit à l'idée d'un développement de Taylor au voisinage de t de ce gradient. Cette idée permet de définir, parmi les fluides non-newtoniens, la classe importante des fluides de type différentiel d'ordre (ou de complexité) n: ce sont des fluides simples incompressibles dont la loi de comportement dépend seulement des n premières dérivées de ce développement de Taylor. Avec de nouveau le principe d'indifférence matérielle, on est conduit à la loi suivante des fluides de type différentiel d'ordre n:

$$T = -\tilde{p}\, I + f(A_1, \ldots, A_n), \tag{0.4}$$

où f est une fonction tensorielle isotrope, c'est-à-dire que

$$f(Q\, A_1\, Q^T, \ldots, Q\, A_n\, Q^T) = Q\, f(A_1, \ldots, A_n)\, Q^T, \ \forall\ Q \text{ orthogonal},$$

et $A_1, \ldots,\ A_n$ sont les n premiers tenseurs de Rivlin-Ericksen donnés par les relations de récurrence

$$A_1 = L + L^T = 2\, D,$$

$$A_n = \dot{A}_{n-1} + L^T A_{n-1} + A_{n-1} L, \text{ avec } \dot{A}_{n-1} = \frac{d}{dt} A_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

Remarquons qu'il existe de nombreux autres modèles différentiels (types Oldroyd, Maxwell, Jeffreys etc.) ou intégraux (type K BKZ). Cependant, un des intérêts de ce modèle différentiel d'ordre n est que les fluides newtoniens s'identifient aux fluides de type différentiel d'ordre 1. Par contre, dès l'ordre 2, la loi de comportement n'est pas simple:

$$\begin{aligned} f(A_1, A_2) = {} & \varphi_0\, I + \varphi_1\, A_1 + \varphi_2\, A_1^2 + \varphi_3\, A_2 + \varphi_4\, A_2^2 + \varphi_5\, (A_1 A_2 + A_2 A_1) \\ & + \varphi_6\, (A_1 A_2^2 + A_2^2 A_1) + \varphi_7\, (A_1^2 A_2 + A_2 A_1^2) + \varphi_8\, (A_1^2 A_2^2 + A_2^2 A_1^2), \end{aligned}$$

où $\varphi_1, \ldots,\ \varphi_8$ sont des fonctions des invariants $tr(\,A_i^k A_j^l)$ pour $i, j = 1, 2$ et $1 \leq k + l \leq 4$.

Par souci de simplification, si on impose à f d'être un polynôme de degré n par rapport à la dérivée de la vitesse, on obtient la sous-classe des fluides de grade n. Ainsi pour les fluides de grade 1, 2 et 3, nous avons les équations constitutives suivantes:

$$T = -\tilde{p}\, I + \nu A_1,$$

$$T = -\tilde{p}\, I + \nu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2,$$

$$T = -\tilde{p}\, I + \nu\, A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 + \beta_1 A_3 + \beta_2 (A_1 A_2 + A_2 A_1) + \beta (tr\, A_1^2) A_1,$$

où ν, α_1, α_2, β_1, β_2, β sont des coefficients spécifiques du fluide. Soulignons la grande utilité pratique des fluides de grade 2 et 3, qui se rencontrent aussi bien dans de nombreuses applications de l'industrie agro-alimentaire et des matières plastiques qu'en médecine. Citons, comme exemples, des polymères, certains liquides du corps humain, certains hydrocarbures.

Il reste à discuter de restrictions éventuelles sur les coefficients, issues de considérations thermodynamiques et d'études de stabilité. Analysant la thermodynamique et la stabilité des fluides de grade 2, dans une région Ω de $\mathbb{R}^3$, J. E. Dunn et R. L. Fosdick [12] ont montré que l'inégalité de Clausius-Duhem demande aux coefficients de vérifier

$$\nu \geq 0 \ , \ \alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

et, si l'énergie libre de Helmholtz est minimum à l'équilibre,

$$\alpha_1 \geq 0.$$

Si ces restrictions sur α_1 et α_2 n'ont pas été confirmées par les expériences, on peut dire, cependant, que l'existence dans la nature de fluides vérifiant $\alpha_1 < 0$ semble très improbable dans le cas $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, comme le montrent l'étude du comportement à l'infini en temps et de la stabilité des solutions de E. H. Ouazar [27] et l'article très détaillé de J. E. Dunn et K. R. Rajagopal [13], ainsi que dans le cas $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, selon J. E. Dunn et R. L. Fosdick [12]. D'autre part, prenant seulement en considération la thermodynamique, on peut montrer, d'après C. Amrouche et D. Cioranescu [4], que si l'inégalité de Clausius-Duhem est satisfaite et si l'énergie libre de Helmholtz est minimum à l'équilibre, alors

$$\nu \geq 0, \ \alpha_1 \geq 0. \tag{0.5}$$

Nous nous placerons sous ces hypothèses, dans l'étude du problème d'évolution des fluides de grade 2. Par contre, pour le problème stationnaire, nous imposerons en plus $\alpha_1+\alpha_2 = 0$.

Des considérations similaires pour les fluides de grade 3 ont conduit R. L. Fosdick et K. R. Rajagopal [15] et [16] à donner les restrictions suivantes pour les coefficients

$$\nu \geq 0, \ \alpha_1 \geq 0, \ \beta_1 = \beta_2 = 0, \ \beta \geq 0,$$

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \leq (24\,\nu\,\beta)^{1/2}.$$

Là encore (cf. C. Amrouche et D. Cioranescu [4]), considérant seulement la thermodynamique, si l'inégalité de Clausius-Duhem est satisfaite et si l'énergie libre de Helmholtz est minimum à l'équilibre, alors

$$\nu \geq 0, \ \alpha_1 \geq 0, \ \beta_1 = \beta_2 = 0, \ \beta \geq 0. \tag{0.6}$$

Ce seront les hypothèses de notre étude sur les fluides de grade 3.

Le travail présenté ici est consacré à l'étude, en dimension trois, des fluides de grade 2 et 3, concernant les questions d'existence globale en temps, d'unicité et de régularité des solutions. Dans une première partie nous étudions le cas d'évolution des fluides de grade 2 dans le cadre le plus général ($\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$), sous les hypothèses (0.5). La deuxième partie traite du problème stationnaire des fluides de grade 2 dans le cas particulier $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ et, de nouveau, sous les hypothèses (0.5). Enfin la troisième partie est consacrée au fluide de grade 3 sous les hypothèses (0.6). Dans un premier temps, ces problèmes sont posés dans un domaine Ω simplement connexe de $\mathbb{R}^3$ avec une frontière Γ au moins de classe $C^{1,1}$. Dans un deuxième temps, nous envisageons le cas non simplement connexe.

Définissons deux espaces fonctionnels que nous utiliserons fréquemment:

$$V = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3; \text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

Dans le cas simplement connexe, on pose

$$V_2 = \{\mathbf{v} \in V; \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)^3\},$$

et, dans le cas non simplement connexe, on pose

$$V_2 = \{\mathbf{v} \in V \cap H^2(\Omega)^3; \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)^3\}.$$

Notons que l'importance de l'espace V_2 vient de ce qu'il s'identifie à l'espace $H^3(\Omega)^3 \cap V$ et nous rappelons l'inégalité fondamentale suivante, dans le cas simplement connexe:

$$\forall \mathbf{v} \in V_2, \ \|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)} \leq C(\alpha_1) \|\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}. \tag{0.7}$$

De façon générale, la méthode pour étudier les problèmes d'évolution de grade 2 et 3, est inspirée des travaux de D. Cioranescu et E. H. Ouazar [8] et [9], de D. Cioranescu et V. Girault [7] et de C. Amrouche et D. Cioranescu [4]. Pour montrer l'existence de solutions globales en temps, cette méthode consiste à obtenir des estimations *a priori*, vérifiées par des solutions assez régulières du problème. Puis, ayant construit un problème approché, on montre que les solutions de ce problème vérifient des estimations analogues à celles du problème en dimension infinie, ce qui nécessite l'usage de bases spéciales: c'est la méthode de Faedo-Galerkin. Enfin, des théorèmes de compacité dans des espaces fonctionnels adéquats permettent de passer à la limite (cf. J. L. Lions [22]). Cependant, la difficulté supplémentaire rencontrée dans notre étude, par rapport à ces travaux, réside dans l'absence d'estimation donnant une décroissance exponentielle en fonction du temps de la norme H^1 de la vitesse pour toute donnée. Or cette estimation semblait si essentielle à la méthode que certains auteurs la jugeaient inapplicable aux problèmes envisagés dans notre travail. Nous verrons, par la suite, comment cette difficulté est surmontée.

Concernant la régularité des solutions, la méthode de C. Cioranescu et V. Girault dans [7], pour les fluides de grade 2, dans le cas où $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, utilise une équation de transport linéaire, qui survient très naturellement dans leur étude, et dont l'unicité dans L^2 est obtenue par transposition. Dans le cas $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ pour le grade 2 et plus encore pour le grade 3, il faut construire cette équation de transport et cela nécessite un travail important. Ensuite, la démonstration de l'unicité dans L^2, du fait de la complexité de l'équation de transport, nécessite un bouleversement de la méthode de transposition.

Le problème stationnaire des fluides de grade 2, au niveau de l'existence et de l'unicité, a été traité par E. H. Ouazar dans [27] dans le cas de la dimension deux. Nous étudions ici le problème en dimension trois. La complication de la dimension trois vient du fait que, $\mathbf{u}_m$ étant une solution du problème approché, nous n'avons plus de majoration de $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$ pour toute donnée. Nous obtenons seulement une inégalité polynômiale qui, a priori, ne permet pas de majoration, même pour une donnée petite. Cet obstacle sera franchi par une technique assez originale qui nous donnera cette majoration pour une donnée petite.

Enfin, le cas Ω non simplement connexe, qui n'avait pas été envisagé dans les travaux précédemment cités, fait intervenir un noyau du rotationnel et de la divergence, induisant de nouvelles difficultés. Ainsi l'inégalité fondamentale (0.7), reliant la norme H^3 de $\mathbf{u}$ à la norme L^2 de $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$ n'existe plus. Quant à la régularité, la constuction de l'équation de transport nécessite une étude plus délicate.

Décrivons à présent, avec plus de détails, le contenu de ce mémoire de thèse. Il se compose des trois parties ci-après:

Première partie. Fluide de grade deux: cas d'évolution.

Posons

$$p = \tilde{p} - (2\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{u}.\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{4}|A_1|^2) + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2. \tag{0.8}$$

La mécanique des fluides de grade 2 nous conduit au problème suivant dans un domaine borné Ω de frontière Γ:

Chercher une fonction à valeurs vectorielles $\mathbf{u}$ (la vitesse) et une fonction scalaire p (dont le lien avec la pression $\tilde{p}$ est précisé par (0.8)) définies dans $\Omega\times]0,T[$, pour un temps $T > 0$, solution de :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \\ &+(\alpha_1 + \alpha_2)(-\Delta(\mathbf{u}.\nabla \mathbf{u}) + 2\mathbf{u}.\nabla(\Delta \mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \end{aligned} \tag{0.9}$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{0.10}$$

avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{sur} \quad \Gamma\times]0,T[, \tag{0.11}$$

et la donnée initiale:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \qquad \text{dans} \quad \Omega. \tag{0.12}$$

Les paramètres α_1 et ν sont des constantes positives données et la donnée initiale $\mathbf{u}_0$ satisfait la condition de compatibilité :

$$\text{div } \mathbf{u}_0 = 0 \;\; \text{dans} \;\; \Omega \text{ et } \;\; \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \;\; \text{sur} \;\; \Gamma. \tag{0.13}$$

Au Chapitre I, **le domaine Ω est simplement connexe**. Les premiers résultats, sur un cas particulier ($\alpha_1 + \alpha_2 = 0$) de ce problème, furent obtenus par D. Cioranescu et E. H. Ouazar dans [8] et [9]. Ils prouvèrent l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution variationnelle sur un certain intervalle de temps, sans restriction sur les données. Par une autre approche (point fixe de Schauder), G. Galdi, M. Grobbelaar et N. Sauer dans [18] et G. Galdi et A. Sequeira dans [19] ont étudié le cas général $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. Cependant leur méthode, étude conjointe de l'existence et de la régularité, demande trop de régularité aux données et, de plus, leur intervalle d'existence diminue artificiellement en fonction de la régularité de ces données.

Récemment, D. Cioranescu et V. Girault dans [7] ont étendu les résultats de [9] en prouvant l'existence globale en temps et la régularité de la solution suivant les données, mais toujours dans le cas $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$.

Comme nous l'avons souligné précédemment, dans le cas $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, il n'y a plus d'estimation donnant une décroissance exponentielle en temps de la norme H^1 ou, de manière équivalente, de la norme dans V, de la vitesse pour toute donnée. Cette difficulté est contournée en remarquant que la décroissance exponentielle manquante existe sous l'hypothèse restrictive

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2} \leq \frac{K_1}{K_2}, \tag{0.14}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes qui dépendent de ν, α_1 et α_2 et que nous explicitons. D'autre part, de manière analogue au cas $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, en prenant le rotationnel de l'équation initiale (0.9), on obtient l'équation suivante, où $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\mathbf{u}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{u}.\nabla(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}).\nabla\mathbf{u} - (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta\mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\omega}$$

$$+(\alpha_1 + \alpha_2)[\boldsymbol{\omega}.\nabla(\Delta\mathbf{u}) + 2\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k} + \nabla u_k \times \nabla\,\Delta u_k)] = \mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}. \tag{0.15}$$

A partir de cette équation, on peut montrer que $y(t) = \|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}$ est solution de l'inéquation différentielle suivante:

$$y'(t) \leq \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)} - C(\alpha_1, \alpha_2)\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2)} - y(t)\right)y(t) + \frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}}\|\mathbf{u}(t)\|_V,$$

où $C(\alpha_1, \alpha_2)$ a une expression assez compliquée, dans laquelle interviennent des constantes de Sobolev. Considérant cette inéquation et la condition (0.14), il devient clair qu'il nous faut prouver

$$\forall t > 0, \|\mathbf{u}(t)\|_{V_2} \leq \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right).$$

En substituant la majoration de la norme dans V de la vitesse, composée d'un terme de décroissance exponentielle en temps et d'un terme où apparaît $(\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}(t)\|_{V_2})$, dans cette inéquation différentielle, nous obtenons effectivement, par contradiction, cette estimation pour $\mathbf{u}$ solution assez régulière du problème, pour des données assez petites et donc, suivant la méthode de Galerkin, pour $\mathbf{u}_m$, solution du problème approché. Ensuite, la démonstration d'existence globale en temps est standard.

Précisément nous montrons que, Ω étant un ouvert borné et simplement connexe de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ de classe $C^{3,1}$, pour $\mathbf{f}$ donné dans $L^1(\mathbb{R}^+; H(\mathbf{rot};\Omega)) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$ et $\mathbf{u}_0$ donné dans V_2, suffisamment petits pour satisfaire

$$\|\mathbf{u}_0\|_{V_2} + \frac{1}{K_1}\frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}}(\|\mathbf{u}_0\|_V + \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt) + \int_0^\infty \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt$$

$$< \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right),$$

le problème (0.9)-(0.12) a une et une seule solution $\mathbf{u}$ qui existe pour tout temps $t \geq 0$. De plus, $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+; V_2)$, $\mathbf{u}'$ à $L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$ et $\mathbf{u}$ est uniformément borné dans V_2 par rapport au temps:

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; V_2)} \leq \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right).$$

Une deuxième difficulté apparaît dans l'étude de la régularité. La méthode utilisée dans [7], par D. Cioranescu et V. Girault, consiste à montrer, d'une part que $\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}$ est l'unique solution dans L^2 d'une équation de transport, en procédant par transposition, d'autre part que cette unique solution a une régularité qui suit celle des données, par une méthode de Galerkin, utilisant une base spéciale, et enfin à utiliser une propriété reliant la régularité de $\mathbf{u}$ à celle de $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}) = \boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}$. Mais, dans le cas $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, pour $\mathbf{u}$ solution dans V_2 de (0.9)-(0.12), l'équation (0.15) est clairement linéaire par rapport à $\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}$, et la substitution de $\mathbf{z}$ à $\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}$ donne directement l'équation de transport cherchée, qui est, en outre, très simple.

Dans le cas $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, la construction de l'équation de transport est beaucoup plus difficile. Nous avons commencé par transformer (0.15), pour obtenir une équation, qui demande le moins de régularité possible à $\mathbf{u}$ et qui soit composée d'une partie linéaire en $\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}$ et d'une partie linéaire en $\boldsymbol{\omega}$. Ensuite nous avons construit un opérateur linéaire $\mathbf{g}$ de $L^2(\Omega)^3$ dans $H^2(\Omega)^3$, par projection et résolutions de problèmes (vecteur potentiel, Stokes), tel que $\mathbf{g}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\mathbf{u}$. Finalement, la substitution de $\mathbf{z}$ à $\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}$ et de $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ à $\boldsymbol{\omega}$ dans l'équation (0.15) transformée nous donne l'équation de transport linéaire en $\mathbf{z}$ souhaitée, dont $\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}$ est une solution dans L^2.

Puisque l'opérateur $\mathbf{g}$ applique aussi $H^1(\Omega)^3$ dans $H^3(\Omega)^3$, montrer ensuite que cette équation admet des solutions régulières (H^1 pour commencer) est standard. Par contre, l'unicité dans L^2 est plus difficile. En effet, outre la complication notable de l'équation, la méthode par transposition ne peut pas s'appliquer directement, car, $\mathbf{g}$ étant définie avec des conditions de bord, il n'y a pas de lien exploitable entre $\mathbf{g}(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_i})$ et $\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{g}(\mathbf{z})$. La difficulté est contournée en scindant l'équation en deux parties, chacune étant traitée séparément. Puis, un raisonnement par densité et quelques majorations nous permettent de démontrer l'unicité sur $[0, T^*]$ et, si $T > T^*$, on recommence le raisonnement sur $[T^*, 2T^*]$, etc. Nous sommes alors conduits à la régularité H^4 de $\mathbf{u}$, puis au résultat général suivant:

Soit un entier $m \geq 1$. Supposant que la solution $\mathbf{u}$ est dans $L^\infty(0, T; V_2)$, nous obtenons que, si la frontière Γ est de classe $C^{m+2,1}$, si $\mathbf{u}_0$ est donné dans $H^{m+3}(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ dans $L^1(0, T; H^m(\Omega)^3)$ avec $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ dans $L^1(0, T; H^m(\Omega)^3)$, alors $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0, T; H^{m+3}(\Omega)^3)$. Nous démontrons ensuite un théorème d'existence et d'unicité pour le couple $(\mathbf{u}, \tilde{p})$, où $\tilde{p}$ et p sont reliés par (0.8), et de régularité pour la dérivée partielle de la vitesse par rapport au temps. Enfin nous montrons l'existence d'une solution classique. Précisément, si la frontière Γ est de classe $C^{6,1}$ et si les données ont la régularité suivante:

$$\mathbf{u}_0 \in H^7(\Omega)^3 \cap V,\ \mathbf{f} \in L^\infty(0, T; H^4(\Omega)^3), \mathbf{rot}\,\mathbf{f} \in L^\infty(0, T; H^4(\Omega)^3)\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \in L^\infty(0, T; H^3(\Omega)^3),$$

alors le problème d'évolution de grade 2 a une solution unique $(\mathbf{u}, \tilde{p})$ dans

$$C^1([0,T]; C^3(\overline{\Omega})^3) \times C([0,T]; C^2(\overline{\Omega})/\mathbb{R}).$$

Au Chapitre II, **le domaine $\boldsymbol{\Omega}$ est non simplement connexe**. Sous cette nouvelle hypothèse, nous traitons, de nouveau, le cas d'évolution des fluides de grade 2. Comme nous l'avons vu précédemment, l'espace V_2 n'est pas défini de la même manière que dans le cas simplement connexe. Tout d'abord, nous avons établi l'inégalité suivante, qui joue le même rôle fondamental que (0.7) pour le cas simplement connexe,

$$\forall \mathbf{v} \in V_2,\ \|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)} \leq C_2(\alpha_1)(\|\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)} + \|P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}, \qquad (0.16)$$

où P est l'opérateur de projection de Helmholtz. Cette inégalité nous a permis de définir, de façon naturelle, une norme dans V_2. Une autre majoration, définissant une constante $C_1(\alpha_1)$, sera très souvent utilisée:

$$\forall \mathbf{v} \in H^2(\Omega)^3 \cap V,\ \|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1(\alpha_1)\|P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}. \qquad (0.17)$$

Par rapport au cas simplement connexe, pour obtenir une inéquation différentielle, vérifiée par $\|\mathbf{u}\|_{V_2}$, il faut non seulement utiliser l'équation (0.15), déduite au moyen de l'opérateur **rot**, mais aussi l'équation obtenue par projection de (0.9) à l'aide de l'opérateur P de Helmholtz. Finalement, nous déduisons un théorème d'existence et d'unicité de même type que dans le cas simplement connexe.

Supposons que Ω soit un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ et que sa frontière Γ soit de classe $C^{3,1}$. Si $\mathbf{f}$ est donné dans $L^1(\mathbb{R}^+; H(\mathbf{rot};\Omega)) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$ et $\mathbf{u}_0$ donné dans V_2 et s'ils sont assez petits pour satisfaire

$$\|\mathbf{u}_0\|_{V_2} + \frac{K_3}{K_1}(\|\mathbf{u}_0\|_V + \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\, dt) + \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)}\, dt$$
$$< \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right),$$

alors le problème (0.9)-(0.12) a une et une seule solution $\mathbf{u}$ qui existe pour tout temps $t \geq 0$. De plus, $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+; V_2)$, $\mathbf{u}'$ à $L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$ et $\mathbf{u}$ est uniformément borné dans V_2 par rapport au temps:

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; V_2)} \leq \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right).$$

Remarquons que les constantes K_1, K_2 et $C(\alpha_1, \alpha_2)$ n'ont pas exactement la même expression que dans le cas simplement connexe. Le chapitre II se termine par des résultats de régularité qui sont pratiquement identiques au cas simplement connexe. Nous devons supposer, cependant, certaines hypothèses qui permettent de "couper" convenablement Ω, afin de se ramener au cas simplement connexe (voir [3]). Pratiquement, ces hypothèses ne sont pas restrictives, car elles sont vérifiées dans tous les exemples usuels de géométrie. Enfin, la construction de l'équation de transport nécessite l'introduction d'un nouvel opérateur $\mathbf{h}$, construit à partir des fonctions de base du noyau, que l'on fait agir sur la solution $\mathbf{u}$. Notons que la régularité de cet opérateur ne s'obtient pas très simplement.

Deuxième partie. Fluide de grade deux: cas stationnaire avec $\boldsymbol{\alpha_1 + \alpha_2 = 0}$.

Le cas stationnaire des fluides de grade 2, dans le cas où $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, nous conduit au problème suivant dans un domaine borné Ω de frontière Γ:

Chercher une fonction à valeurs vectorielles $\mathbf{u}$ (la vitesse) et une fonction scalaire p (dont le lien avec la pression $\tilde{p}$ est précisé par (0.8)) définies dans Ω, solution de :

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \tag{0.18}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \qquad \text{dans } \ \Omega, \tag{0.19}$$

avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{sur } \ \Gamma. \tag{0.20}$$

Les paramètres α_1 et ν sont supposés strictement positifs.

Au Chapitre III, **le domaine $\boldsymbol{\Omega}$ est simplement connexe**. Comme dans le travail de E. H. Ouazar [27] en dimension deux, nous commençons, en dimension trois, par montrer l'existence d'une solution $\mathbf{u}_m$ du problème approché par le Théorème de Brouwer et nous obtenons facilement une majoration dans H^1 de $\mathbf{u}_m$. Nous avons déja parlé de la difficulté à montrer, en dimension trois, une majoration de $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$. L'idée principale pour l'obtenir est de montrer que la norme dans V_2 d'une solution $\mathbf{u}_m$ du problème approché vérifie une inéquation polynômiale et, qu'en conséquence, elle est exclue d'un certain intervalle $[\rho_1, \rho_2]$. Utilisant alors une “dépendance continue” par rapport à la donnée (vérifiée pour $\mathbf{u}_m$ assez petit en norme V_2), on montre, par contradiction, que $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$, du fait de la majoration de $\mathbf{u}_m$ en norme H^1 en fonction de la donnée et si cette donnée est assez petite, ne peut se situer “à droite” de l'intervalle. De là, il suit que $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$ est borné supérieurement par ρ_1. L'originalité de cette démarche est dans l'utilisation conjointe de la majoration en norme H^1, de l'inégalité polynômiale et de la “pseudo dépendance continue” par rapport à la donnée. Notons que la démonstration par contradiction est longue et délicate. La suite de l'étude, concernant l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport à la donnée, est classique.

Nous obtenons les résultats suivants: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, borné et simplement connexe avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Si $\mathbf{f}$ est donné dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire

$$\frac{\sqrt{2}}{\alpha_1}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\nu^2}{2\alpha_1 K(\alpha_1)},$$

où $K(\alpha_1)$ est une constante que nous explicitons, alors le problème (0.9)-(0.11) admet une unique solution $(\mathbf{u}, p)$ dans $V_2 \times (H^1(\Omega)/\mathbb{R})$. De plus $\mathbf{u}$ satisfait la borne supérieure:

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} \leq \frac{\frac{\nu}{\alpha_1} - \sqrt{\frac{\nu^2}{\alpha_1^2} - 4C_1C(\alpha_1)(\frac{\sqrt{2}}{\alpha_1}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)})}}{2C_1C(\alpha_1)}.$$

Nous démontrons ensuite un résultat de dépendance continue par rapport à la donnée $\mathbf{f}$. Si $\mathbf{f}_1$ (resp. $\mathbf{f}_2$) vérifie la condition précédente sur $\mathbf{f}$, si $\mathbf{u}_1$ (resp. $\mathbf{u}_2$) est la solution associée à $\mathbf{f}_1$ (resp. $\mathbf{f}_2$), alors on a la majoration

$$|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2\mathcal{P}}{\nu L(\alpha_1)} \|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|_{L^2(\Omega)},$$

où $L(\alpha_1)$ est une constante similaire à $K(\alpha_1)$.

La régularité est traitée par une technique analogue au cas d'évolution. Si les hypothèses précédentes du résultat d'existence et d'unicité sont vérifiées et si, de plus, $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartient à $H^1(\Omega)^3$, alors la solution $\mathbf{u}$ appartient à $H^4(\Omega)^3$ et on a une majoration du type

$$\|\mathbf{u}\|_{H^4(\Omega)} \leq c_1 \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + d_1 \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour la régularité H^5, nous obtenons: si la frontière Γ est de classe $C^{4,1}$, si $\mathbf{f}$ est donné dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire

$$\frac{\sqrt{2}}{\alpha_1}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\nu^2}{2\alpha_1} \min\left(\frac{1}{K(\alpha_1)}, \frac{1}{4(C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C(\alpha_1)}\right),$$

et si, de plus, $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartient à $H^2(\Omega)^3$, alors la solution $\mathbf{u}$ appartient à $H^5(\Omega)^3$ et vérifie une majoration du type

$$\|\mathbf{u}\|_{H^5(\Omega)} \leq c_2 \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + d_2 \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^2(\Omega)}.$$

Puis, nous établissons, pour un entier $m \geq 2$, un résultat de régularité H^{m+3} de la solution $\mathbf{u}$, sous les hypothèses suivantes:

Γ de classe $C^{m+2,1}$, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$ et $\mathbf{rot}\,\mathbf{f} \in H^m(\Omega)^3$ vérifiant une condition du type

$$a_m \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + b_m \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^{m-2}(\Omega)} < 1,$$

où les suites $\{a_m\}$ et $\{b_m\}$ sont croissantes. De plus, on a une majoration du type

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq c_m \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + d_m \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^m(\Omega)}.$$

Enfin, sous les hypothèses de la régularité H^5, nous obtenons une solution classique unique $(\mathbf{u}, p)$ dans $C^3(\overline{\Omega})^3 \times (C^1(\overline{\Omega})/\mathbb{R})$.

Notons qu'au sujet de la régularité, nous sommes conduits à une situation nouvelle par rapport au cas d'évolution: une régularité de plus en plus grande de la solution nécessite une donnée de plus en plus petite. Ce phénomène est dû à la non-linéarité, qui n'est pas compensée par l'effet stabilisant de la dérivée par rapport au temps.

Au Chapitre IV, **le domaine $\boldsymbol{\Omega}$ est non simplement connexe**. De nouveau, nous étudions le problème (0.18)-(0.20). Il suffit, pour cela, de pratiquer les mêmes techniques qu'au chapitre précédent, mais avec les définitions de l'espace V_2 et de la norme dans V_2 du Chapitre II et en utilisant certaines propriétés de ce même chapitre. Les inégalités (0.16) et (0.17), qui définissent les constantes $C_2(\alpha_1)$ et $C_1(\alpha_1)$, jouent, là encore, un rôle fondamental. Nous obtenons des résultats du même type que dans le cas simplement connexe.

Supposons que Ω soit un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ et que sa frontière Γ soit de classe $C^{3,1}$. Si $\mathbf{f}$ est donné dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire

$$(1+\frac{\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2}}{\alpha_1})\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}<\frac{\nu^2}{2\alpha_1}\min(\frac{1}{K(\alpha_1)},\frac{1}{2C_1\alpha_1\max(C_2(\alpha_1),C_1(\alpha_1))}),$$

où $K(\alpha_1)$ est une constante que nous explicitons, alors le problème (0.18)- (0.20) admet une unique solution $(\mathbf{u},p)$ dans $V_2\times(H^1(\Omega)/\mathbb{R})$. De plus $\mathbf{u}$ satisfait la borne supérieure:

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2}\leq\frac{\frac{\nu}{\alpha_1}-\sqrt{\frac{\nu^2}{\alpha_1^2}-4C_1\max(C_2(\alpha_1),\sqrt{2}\,C_1(\alpha_1))((1+\frac{\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2}}{\alpha_1})\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)})}}{2C_1\max(C_2(\alpha_1),C_1(\alpha_1))}.$$

Pour la continuité de la solution par rapport à la donnée, nous avons un résultat un peu moins bon que dans le cas simplement connexe. Si $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}_2$ vérifient la condition précédente sur $\mathbf{f}$ et si $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont les solutions associées, alors, pour $i=1,2$, on a $\nu-\rho_1(\mathbf{f}_i)K(\alpha_1)>0$ et la majoration suivante est vérifiée:

$$|\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1|_{H^1(\Omega)}\leq\frac{\mathcal{P}}{\nu-\rho_1(\mathbf{f}_2)K(\alpha_1)}\|\mathbf{f}_2-\mathbf{f}_1\|_{L^2(\Omega)}.$$

Enfin, nous obtenons des résultats de régularité H^4 qui sont de même type que dans le cas simplement connexe et qui ne nécessitent pas l'hypothèse des "coupures" du domaine. Par contre, à l'ordre 5, la condition qui donne la majoration de $\|\mathbf{u}\|_{H^5(\Omega)}$ est un peu plus restrictive que celle qui assure la régularité H^5 de $\mathbf{u}$. On généralise de la même manière qu'au chapitre précédent et on obtient des conditions pour la régularité H^{m+3} de $\mathbf{u}$, pour un entier $m\geq 2$. Nous terminons le chapitre par l'existence de la solution classique.

Troisième partie. Sur une classe de fluide de grade trois.

L'équation de mouvement des fluides de grade 3 nous conduit au problème suivant dans un domaine borné Ω de frontière Γ:

Chercher une fonction à valeurs vectorielles $\mathbf{u}$ (la vitesse) et une fonction scalaire p (dont le lien avec la pression $\tilde{p}$ est précisé par (0.8)) définies dans $\Omega\times]0,T[$, pour un temps $T>0$, solution de :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})-\nu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{rot}(\mathbf{u}-(2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u})\times\mathbf{u}-(\alpha_1+\alpha_2)\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u})\\&\qquad+2(\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u})-\beta\mathrm{div}(|A_1|^2A_1)+\nabla p=\mathbf{f}\ \text{dans}\ \ \Omega\times]0,T[,\end{aligned}\tag{0.21}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{u}=0\qquad\text{dans}\ \ \Omega\times]0,T[,\tag{0.22}$$

avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière:

$$\mathbf{u}=\mathbf{0}\qquad\text{sur}\ \ \Gamma\times]0,T[,\tag{0.23}$$

et la donnée initiale:

$$\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0\qquad\text{dans}\ \ \Omega.\tag{0.24}$$

Les paramètres α_1, ν et β sont des constantes positives données et la donnée initiale $\mathbf{u}_0$ satisfait la condition de compatibilité :

$$\text{div } \mathbf{u}_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \text{ et } \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma. \tag{0.25}$$

Au Chapitre V, **le domaine $\boldsymbol{\Omega}$ est simplement connexe**. Les fluides de grade 3 ont été étudiés par C. Amrouche dans [2] et par C. Amrouche et D. Cioranescu dans [4]. Dans le cas de la dimension trois, ils obtinrent l'existence et l'unicité de la solution du problème (0.21)-(0.25) sur un certain intervalle de temps, sans restriction sur les données, mais sous la condition supplémentaire

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \leq (24\,\nu\beta)^{1/2}. \tag{0.26}$$

D'autre part, ils prouvèrent l'existence globale en temps, sous certaines restrictions sur les données, mais seulement pour la dimension deux.

Notre étude se place en dimension trois et nous ne supposons pas la condition (0.26), qui permet d'obtenir une majoration de la norme H^1 de la vitesse pour toute donnée. Comme dans le cas des fluides de grade 2 avec $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, nous n'avons pas, dans le cas du grade 3, de décroissance exponentielle en fonction du temps de la norme H^1 de la vitesse pour toute donnée. Ainsi, les difficultés étant pratiquement les mêmes, elles se surmontent de la même manière. Notons que les majorations sont un peu plus techniques et que la convergence de $K(\mathbf{u}_m)$ vers $K(\mathbf{u})$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ faible, où $K(\mathbf{u}) = -\text{div}(|A_1|^2 A_1)$, demande un travail plus important. Les résultats obtenus, en ce qui concerne l'existence globale en temps et l'unicité, sont comparables à ceux obtenus pour les fluides de grade 2.

Nous montrons que, Ω étant un ouvert borné et simplement connexe de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ de classe $C^{3,1}$, pour $\mathbf{f}$ donné dans $L^2(\mathbb{R}^+; H(\mathbf{rot};\Omega)) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$ et $\mathbf{u}_0$ donné dans V_2, suffisamment petits pour satisfaire

$$\|\mathbf{u}_0\|_{V_2}^2 + \frac{8\nu + C(\alpha_1)K_1}{2\alpha_1^2 K_1}(\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt) + \frac{2\alpha_1}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt$$
$$< \min\left(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}, \frac{K_1^2}{K_2^2}\right),$$

le problème (0.21)-(0.24) a une et une seule solution $\mathbf{u}$ qui existe pour tout temps $t \geq 0$. De plus, $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+; V_2)$, $\mathbf{u}'$ à $L^2(\mathbb{R}^+; V)$ et $\mathbf{u}$ est uniformément borné dans V_2 par rapport au temps:

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; V_2)} \leq \min\left(\sqrt{\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}}, \frac{K_1}{K_2}\right).$$

L'étude de la régularité de la solution s'effectue pratiquement de la même manière que pour les fluides de grade 2 et les résultats sont identiques. La construction de l'équation de transport nécessite, cependant, l'introduction d'un nouvel opérateur $\mathbf{l}$, qui applique $L^2(\Omega)^3$ dans $H^3(\Omega)^3$ et $H^1(\Omega)^3$ dans $H^4(\Omega)^3$. De plus, les majorations pour prouver l'existence d'une solution dans H^1 de l'équation de transport sont très laborieuses.

Supposons que la solution $\mathbf{u}$ soit dans $L^\infty(0,T;V_2)$. Nous obtenons que, si la frontière Γ est de classe $C^{3,1}$ et si $\mathbf{u}_0$ est donné dans $H^4(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ dans $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$ avec $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ dans $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$, alors $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$. Nous indiquons, pour terminer le chapitre, un résultat général de régularité.

Au Chapitre VI, **le domaine $\boldsymbol{\Omega}$ est non simplement connexe**. Nous étudions, de nouveau, le problème (0.21)-(0.24). Ce chapitre utilise des techniques et des résultats du Chapitre II, notamment les deux inégalités (0.16) et (0.17), et certaines majorations du Chapitre V. Il n'y a pas de difficulté nouvelle. Les résultats sont comparables à ceux du chapitre précédent.

Supposons que Ω soit un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ et que sa frontière Γ soit de classe $C^{3,1}$. Si $\mathbf{f}$ est donné dans $L^2(\mathbb{R}^+;H(\mathbf{rot};\Omega))\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2(\Omega)^3)$ et $\mathbf{u}_0$ donné dans V_2 et s'ils sont assez petits pour satisfaire

$$\|\mathbf{u}_0\|_{V_2}^2 + \frac{2\alpha_1^2K_3 + C_2(\alpha_1)K_1}{2\alpha_1^2K_1}(\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt) + \frac{2\alpha_1}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)}^2\,dt$$

$$< \min\left(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}, \frac{K_1^2}{K_2^2}\right),$$

alors le problème (0.21)-(0.24) a une et une seule solution $\mathbf{u}$ qui existe pour tout temps $t \geq 0$. De plus, $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+;V_2)$, $\mathbf{u}'$ à $L^2(\mathbb{R}^+;V)$ et $\mathbf{u}$ est uniformément borné dans V_2 par rapport au temps:

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;V_2)} \leq \min\left(\sqrt{\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}}, \frac{K_1}{K_2}\right).$$

Encore une fois, les constantes K_1, K_2 et $C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ ne sont pas exactement les mêmes que dans le cas simplement connexe. Au sujet de la régularité, la construction de l'équation de transport nécessite l'introduction de deux nouveaux opérateurs $\mathbf{l}$ (nouvelle définition) et $\mathbf{s}$, qui agissent le premier sur $\mathbf{z}$ et le second sur $\mathbf{u}$ et qui sont liés très simplement aux opérateurs $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$. Sous l'hypothèse des "coupures", le résultat de régularité H^4 de la solution $\mathbf{u}$ est le même que dans le cas simplement connexe et il se généralise de la même manière.

Outre leur intérêt mathématique, ces théorèmes d'existence globale en temps et d'unicité nous semblent confirmer la validité de ces modèles physiques de mécanique des fluides et on peut légitimement s'émerveiller que des systèmes d'équations aussi compliqués fixent à la fois la vitesse et la pression, en tout point du domaine et en tout temps, de façon unique. D'autre part, ces études et notamment les résultats de régularité, contribueront, nous l'espérons, à la mise en place de bonnes méthodes numériques pour résoudre ces problèmes d'un point de vue pratique.

Dans le champ d'étude des fluides de grade 2 et 3, il reste de nombreuses questions à examiner. Citons-en quelques-unes.

La question la plus immédiate est celle de la régularité de la frontière. La condition de régularité $C^{3,1}$, qui est demandée pour les résultats d'existence, doit pouvoir être réduite à la régularité $C^{2,1}$. En effet, d'une part, elle est uniquement utilisée pour obtenir la régularité H^4 des fonctions de base de la méthode de Galerkin et n'intervient nulle part dans les estimations utilisées pour l'existence et, d'autre part, elle est aussi la condition suffisante, au niveau de la frontière, de la régularité H^4 de $\mathbf{u}$. De plus, sans changer la régularité des données, on devrait pouvoir diminuer encore la régularité de la frontière en cherchant une solution dans un espace plus grand que H^3, par exemple $W^{2,4}$.

Une autre perspective de travail vient du fait que la méthode développée ici pour résoudre le problème stationnaire s'applique, selon E. H. Ouazar, au problème stationnaire des fluides de grade 3, en dimension deux. Par ailleurs, cette méthode devrait pouvoir s'appliquer à ce même problème en dimension trois, mais seulement sous la condition (0.26) sur les coefficients. Par contre, le cas $\alpha_1+\alpha_2 \neq 0$ du grade 2 paraît résister à cette méthode.

Autre type de recherche possible: faire l'analyse numérique des schémas utilisés actuellement par les ingénieurs pour résoudre les fluides de grade 2 et 3 , obtenir et étudier de nouveaux schémas, etc.

Enfin le problème non homogène semble décourager toutes les tentatives. Quelque soit notre démarche, croyant être sur le point d'aboutir, une difficulté survient, nous amenant à penser qu'il y aurait un obstacle infranchissable et que le problème, au niveau de la frontière, serait peut-être mal posé. Mais quelles conditions de frontière faudrait-il imposer ?

Pour conclure, il apparaît une certaine unité dans les principales méthodes mises en place dans cette recherche. Pour les problèmes d'évolution, nous utilisons une "pseudo décroissance exponentielle" en temps de la norme H^1 de la vitesse (vraie seulement pour $\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}$ assez petit), que nous injectons dans une inéquation différentielle, utilisable, elle aussi, pour $\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}$ assez petit. De ce couplage, par contradiction, utilisant une borne inférieure du fait de la double demande au niveau de $\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}$, nous déduisons la majoration essentielle de $\mathbf{u}$ dans V_2, pour des données assez petites. Pour le problème stationnaire, nous utilisons une "pseudo dépendance continue" par rapport à la donnée (vraie pour $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$ assez petit), que nous associons à une majoration H^1 et à une inégalité polynômiale, vérifiée par $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$. Par contradiction, là encore, sous une condition qui rassemble toutes ces informations, nous arrivons à la majoration essentielle de $\mathbf{u}_m$ dans V_2, pour une donnée assez petite. Dans tous les cas, l'introduction de la variable auxiliaire $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$, qui aboutit à une décomposition des équations, a joué un rôle essentiel dans l'analyse de tous ces problèmes. Ce n'est pas la seule décomposition possible, mais en comparant avec d'autres approches, elle nous est apparue comme étant la plus efficace.

Première partie

Fluide de grade deux : cas d'évolution.

Chapitre I

Fluide de grade deux avec Ω simplement connexe

1 Introduction

La loi de comportement la plus générale pour les fluides de grade 2 est

$$T = -\tilde{p}I + \nu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2, \tag{1.1}$$

(cf. W. Noll et C. Truesdell [25]) , où T est le tenseur des contraintes, $\tilde{p}$ la pression (une fonction scalaire), I la matrice unité et A_1, A_2 sont les deux premiers tenseurs de Rivlin-Ericksen donnés par :

$$A_1 = L + L^T \text{ avec } L_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

où $\mathbf{u}$ est le vecteur vitesse et

$$A_2 = \frac{dA_1}{dt} + A_1 L + L^T A_1.$$

La constante ν est la viscosité et les coefficients α_1 et α_2 sont les modules de contrainte normale. L'incompressibilité se traduit par

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \tag{1.2}$$

La thermodynamique des fluides de grade 2 impose que ν et α_1 soient non négatifs (cf. J. E. Dunn et R. L. Fosdick [12]), aussi nous supposerons

$$\nu > 0 \text{ et } \alpha_1 > 0. \tag{1.3}$$

En développant, on montre que

$$A_1 L + L^T A_1 = A_1 W - W A_1 + A_1^2$$

où

$$W = \frac{1}{2}(L - L^T).$$

On peut donc exprimer T sous la forme

$$T = -\tilde{p}I + \nu A_1 + \alpha_1(\frac{d}{dt}A_1 + A_1W - WA_1) + (\alpha_1 + \alpha_2)A_1^2.$$

L'équation de mouvement pour un fluide de grade 2 est de la forme

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \operatorname{div} T + \mathbf{f}. \tag{1.4}$$

En remarquant que

$$\frac{d}{dt}A_1 = \frac{\partial}{\partial t}A_1 + \nabla A_1.\mathbf{u} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{div} A_1 = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u},$$

on peut écrire

$$\operatorname{div} T = -\nabla\tilde{p} + \nu\Delta\mathbf{u} + \alpha_1\frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial t} + \alpha_1\operatorname{div}(\nabla A_1.\mathbf{u} + A_1W - WA_1) + (\alpha_1 + \alpha_2)\operatorname{div}(A_1^2). \tag{1.5}$$

D'une part

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla A_1.\mathbf{u} + A_1W - WA_1) &= 2\,\Delta W\,.\mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u}.\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{4}|A_1|^2) \\ &= \mathbf{rot}(\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u}.\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{4}|A_1|^2), \end{aligned} \tag{1.6}$$

où

$$|A_1|^2 = \operatorname{tr}(A_1A_1^T).$$

D'autre part

$$(\operatorname{div}(A_1^2))_i = \sum_{k,j=1}^{3}(2\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j^2}).$$

Nous vérifions alors que :

$$\sum_{k,j=1}^{3} 2\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = (\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}) - \Delta\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} - \mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u}))_i,$$

$$\sum_{k,j=1}^{3}(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}) = \frac{1}{4}(\nabla(|A_1|^2))_i,$$

$$\sum_{k,j=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j^2} = (\nabla(\mathbf{u}.\Delta\mathbf{u}) + \mathbf{rot}(\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} - \mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u}))_i.$$

Nous déduisons de ces égalités :

$$\operatorname{div}(A_1^2) = \Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}) - 2\,\mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u}) + \mathbf{rot}(\Delta\,\mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u}.\Delta\,\mathbf{u} + \frac{1}{4}|A_1|^2). \tag{1.7}$$

Les relations (1.5), (1.6) et (1.7) permettent de calculer $\operatorname{div} T$

$$\operatorname{div} T = -\nabla\tilde{p} + \nu\Delta\mathbf{u} + \alpha_1\frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial t} + (\alpha_1+\alpha_2)(\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}) - 2\mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u}))$$
$$+(2\alpha_1+\alpha_2)(\mathbf{rot}\,(\Delta\mathbf{u})\times\mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u}.\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{4}|A_1|^2)). \quad (1.8)$$

En utilisant (1.8) et la relation

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{rot}\,\mathbf{u}\times\ \mathbf{u} + \nabla\,(\tfrac{1}{2}|\mathbf{u}|^2),$$

l'équation (1.4) s'écrit :

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - \nu\,\Delta\mathbf{u} - \alpha_1\frac{\partial}{\partial t}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u})\times\mathbf{u} - (\alpha_1+\alpha_2)\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u})$$
$$+2(\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u}) + \nabla\tilde{p} - (2\alpha_1+\alpha_2)\nabla(\mathbf{u}.\Delta\,\mathbf{u} + \frac{1}{4}|A_1|^2) + \frac{1}{2}\nabla(|\mathbf{u}\,|^2) = \mathbf{f}. \quad (1.9)$$

Cette équation de mouvement est complétée par l'équation d'état (1.2), une donnée initiale pour la vitesse et une condition homogène pour la vitesse sur la frontière du domaine.

Le problème (1.9) est difficile parce que ses termes non-linéaires font intervenir des dérivées du troisième ordre. Un regard plus attentif montre qu'il se comporte quelque peu comme une équation d'Euler. En effet, la décomposition d'Helmholtz de $\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}$ donne

$$\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla\,q,$$

où $\mathbf{w}$ et q sont déterminés par les conditions

$$\operatorname{div}\mathbf{w} = 0\ ,\ \ \mathbf{w}.\mathbf{n} = 0 \quad \text{sur la frontière du domaine.}$$

Alors, utilisant

$$\operatorname{div}(\nabla\,A_1.\mathbf{u}) = L^T : \nabla\,A_1 + \mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u}),$$

et posant

$$N(\mathbf{u}) = \alpha_1(L^T : \nabla A_1 + \operatorname{div}(A_1W - WA_1)) + (\alpha_1+\alpha_2)\operatorname{div} A_1^2,$$

le problème (1.4) peut être écrit formellement:

$$\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\,\mathbf{w} + \mathbf{u}.\nabla\nabla q + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{w} + \nabla(\tilde{p} + \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\nu}{\alpha_1}q) = \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u} + N(\mathbf{u}) + \mathbf{f}. \quad (1.10)$$

Cette équation, qui correspond au problème (1.9) écrit sous une autre forme, est similaire à une équation d'Euler avec un effet d'amortissement venant du terme $\frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{w}$. Cette observation suggère de prendre le rotationnel de l'équation (1.9). Ainsi, à partir de (1.9), posant

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{u},$$

nous obtiendrons au Paragraphe 2 une équation de transport du type

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{u}.\nabla(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + M(\mathbf{u}) = \mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}, \quad (1.11)$$

où $M(\mathbf{u})$ rassemble des termes non-linéaires d'ordre inférieur que nous expliciterons.

D. Cioranescu et E.H. Ouazar dans [8] et [9] furent les premiers à résoudre ce problème avec succès dans le cas plus simple où $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Ils utilisèrent une méthode de Galerkin avec une base spéciale de vecteurs propres qui correspondait au produit scalaire associé à l'opérateur $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$. Cette base était destinée à décomposer le problème discret de Galerkin en un problème de Stokes continu et une version discrète de l'équation de transport (1.11), dont ils déduisaient de fines estimations d'énergie. En dimension trois, ils obtinrent l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution variationnelle sur un certain intervalle de temps, sans restriction sur les données.

Cette méthode est simple, très puissante et bien plus efficace, même dans le cas étudié ici où $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, que l'approche utilisée par G. Galdi, M. Grobbelaar et N. Sauer dans [18] et G. Galdi et A. Sequeira dans [19]. En effet, tous ces auteurs prouvent existence et régularité en même temps par un point fixe de Schauder. La conséquence est que, en plus de demander trop de régularité aux données, leur intervalle d'existence diminue artificiellement très rapidement en fonction de la régularité de ces données.

Récemment, D. Cioranescu et V. Girault dans [7] ont étendu les résultats de [9] en prouvant l'existence globale en temps pour le problème (1.9) en dimension trois avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ et la régularité de la solution suivant les données.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'appliquer la même méthode afin de prouver des résultats similaires pour le problème (1.9) en dimension trois avec $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. Plus précisément, nous établirons l'existence globale en temps pour tous les paramètres satisfaisant (1.3) et des données suffisamment petites (ou une existence locale en temps pour toute donnée) et la régularité de la solution. Cette extension n'est pas immédiate pour deux raisons. Premièrement, la décroissance exponentielle en fonction du temps de la norme H^1 de la vitesse est un élément crucial de la démonstration de l'existence globale en temps. Contrairement au cas où $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, cette décroissance exponentielle ne découle pas directement de l'équation (1.9). Au lieu de cela, elle est obtenue en combinant (1.9) avec l'équation de transport (1.11). Deuxièmement, pour $\mathbf{u}$ donné, cette équation de transport est beaucoup plus complexe que dans le cas où $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, et ceci complique substantiellement la démonstration de la régularité de la solution.

Ce chapitre est organisé comme suit. Le problème et les espaces associés sont décrits dans le Paragraphe 2. Le Paragraphe 3 est consacré à la démonstration d'estimations formelles *a priori* satisfaites par des solutions régulières du problème. Dans le Paragraphe 4, nous prouvons l'unicité de la solution si elle existe. L'existence est établie dans le Paragraphe 5 en appliquant une méthode de Galerkin avec une base spéciale. Les résultats d'existence et d'unicité sont utilisés dans le Paragraphe 6 pour montrer la régularité H^4 de la solution quand les données ont la régularité adéquate. Enfin, dans le Paragraphe 7, nous généralisons les résultats de régularité, de là la solution classique.

2 Formulation du problème et notation

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$, borné et simplement connexe, de frontière Γ qui est au moins de classe $C^{2,1}$. Nous notons $\mathbf{n}$ le vecteur normal unitaire à Γ, dirigé vers l'extérieur de Ω. En posant

$$p = \tilde{p} - (2\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{u}.\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{4}|A_1|^2) + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2,$$

l'équation (1.9) se simplifie et le système d'équations que nous proposons de résoudre est :

Chercher une fonction à valeurs vectorielles $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et une fonction scalaire p définies dans $\Omega\times]0,T[$, pour un temps $T > 0$, solution de :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) - \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u}\\ &+(\alpha_1 + \alpha_2)(-\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}) + 2\mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[,\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{2.2}$$

avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{sur} \quad \Gamma\times]0,T[, \tag{2.3}$$

et la donnée initiale:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \qquad \text{dans} \quad \Omega. \tag{2.4}$$

Les paramètres α_1 et ν sont des constantes positives données et la donnée initiale $\mathbf{u}_0$ satisfait à la condition de compatibilité :

$$\text{div } \mathbf{u}_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \text{ et } \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma. \tag{2.5}$$

Pour poser ce problème dans des espaces adéquats, rappelons la définition des espaces de Sobolev standard (cf. J. Nečas [24]). Pour tout multi-indice $k = (k_1, k_2, k_3)$ avec $k_i \geq 0$, posons $|k| = k_1 + k_2 + k_3$ et notons

$$\partial^k v = \frac{\partial^{|k|} v}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}}.$$

Alors pour tout entier $m \geq 0$ et nombre p avec $1 \leq p \leq \infty$, nous définissons

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega); \partial^k v \in L^p(\Omega) \text{ pour } 1 \leq |k| \leq m\},$$

qui est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = (\sum_{|k|=0}^{m} \sum_{k} \|\partial^k v\|^p_{L^p(\Omega)})^{1/p},$$

avec les modifications usuelles quand $p = \infty$. Nous notons $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

Pour les fonctions vectorielles $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$, nous utilisons des normes spéciales: si $1 \leq p \leq \infty$, nous posons

$$\|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)^N} = \| \, |\mathbf{v}| \, \|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.6}$$

où $| \, . \, |$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$. Pour simplifier, nous noterons $\|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)}$ au lieu de $\|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)^N}$. Nous considérons les matrices 3×3 comme des éléments de $L^p(\Omega)^9$ et nous définissons leurs normes L^p en utilisant (2.6) avec $N = 9$. Nous définissons de même les normes des tenseurs.

Nous utiliserons fréquemment le produit scalaire de $L^2(\Omega)$

$$(f, g) = \int_\Omega f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

la semi-norme de $H^1(\Omega)$

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

et les sous-espaces de $H^1(\Omega), L^2(\Omega)^3$ et $H^1(\Omega)^3$:

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \ \text{ sur } \Gamma\}, \\ H(\mathbf{rot}; \Omega) &= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3; \mathbf{rot}\ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3\}, \\ V &= \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \ \text{ dans } \Omega\}. \end{aligned}$$

Rappelons aussi l'inégalité de Poincaré, vraie dans tout domaine borné : il existe une constante $\mathcal{P}$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \ \|v\|_{L^2(\Omega)} \ \leq \ \mathcal{P} |v|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.7}$$

En ce qui concerne la dépendance par rapport au temps, pour tout nombre $T > 0$, tout espace de Banach X et tout nombre r tel que $1 < r < \infty$, nous définissons l'espace

$$L^r(0, T; X) = \{v :]0, T[\mapsto \ X; v \text{ est mesurable et } (\int_0^T \|v(t)\|_X^r \, dt)^{1/r} < \infty\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{L^r(0,T;X)} = (\int_0^T \|v(t)\|_X^r \, dt)^{1/r}.$$

Suivant l'approche de [9], nous introduisons l'espace

$$V_2 = \{\mathbf{v} \in V; \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)^3\}. \tag{2.8}$$

Nous rappelons un lemme de [7].

Lemme 2.1 *Soit Ω un ouvert de $I\!R^3$, borné et simplement connexe, avec une frontière Γ de classe $C^{2,1}$. Alors tout $\mathbf{v}$ dans V_2 appartient à $H^3(\Omega)^3$ et il existe une constante $C(\alpha_1)$ telle que*

$$\forall \mathbf{v} \in V_2,\ \|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)} \leq C(\alpha_1)\|\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.9}$$

De plus, la constante $C(\alpha_1)$ admet la majoration

$$C(\alpha_1) \leq \frac{\gamma}{\alpha_1}\sqrt{2},\ \text{si}\ \alpha_1 \geq \frac{1}{2}\ \text{ou}\ C(\alpha_1) \leq \frac{\gamma}{\alpha_1^{3/2}},\ \text{si}\ \alpha_1 < \frac{1}{2}, \tag{2.10}$$

où γ est indépendant de α_1.

Remarque 2.2 *La régularité $C^{2,1}$ de Γ est nécessaire pour que $\mathbf{v}$ appartienne à $H^3(\Omega)^3$.*

Remarque 2.3 *La démonstration du Lemme (2.1) peut être facilement prolongée pour prouver que, pour tout entier $m \geq 0$, si Γ est de classe $C^{m+2,1}$ et si $\mathbf{v}$ appartient à V avec* **rot** $(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})$ *dans $H^m(\Omega)^3$, alors $\mathbf{v}$ appartient à $H^{m+3}(\Omega)^3$ et bien sûr l'injection est continue.*

L'espace V_2 est muni du produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_2} = (\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}), \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})) \tag{2.11}$$

et de la norme associée $\|\mathbf{v}\|_{V_2} = (\mathbf{v}, \mathbf{v})_{V_2}^{1/2}$. De là, grâce au Lemme 2.1,

$$\forall \mathbf{v} \in V_2,\ \|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)} \leq C(\alpha_1)\|\mathbf{v}\|_{V_2}. \tag{2.12}$$

Nous introduisons les constantes de Sobolev C_1 et C_2 définies par

$$\forall v \in H^2(\Omega),\ \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1\|v\|_{H^2(\Omega)} \tag{2.13}$$

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ \|v\|_{L^6(\Omega)} \leq C_2\|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.14}$$

Avec les normes définies par (2.6), nous avons alors

$$\forall \mathbf{v} \in (H^3(\Omega))^N, \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1\|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)}. \tag{2.15}$$

De plus, utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)} \leq \|\mathbf{v}\|_{L^6(\Omega)}^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}},$$

mais

$$\|\mathbf{v}\|_{L^6(\Omega)} \leq C_2 \|\,|\mathbf{v}|\,\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}$$

et

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc

$$\forall \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^N,\ \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)} \leq C_2^{3/4}\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.16}$$

Formulation variationnelle

Nous introduisons une forme trilinéaire utilisée dans les équations d'Euler et Navier-Stokes:

$$b(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \, d\mathbf{x}.$$

Nous proposons la formulation variationnelle suivante de (2.1)-(2.5):

Pour $\mathbf{f}$ donné dans $L^1(0,T;H(\mathbf{rot};\Omega)) \bigcap L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)$ et $\mathbf{u}_0$ donné dans V_2, chercher $\mathbf{u}$ dans $L^\infty(0,T;V_2)$ avec $\mathbf{u}'$ dans $L^\infty(0,T;V)$, tel que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in V \qquad & (\mathbf{u}',\mathbf{v}) + \alpha_1(\nabla\mathbf{u}',\nabla\mathbf{v}) + \nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v}) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u},\mathbf{v}) \\ & +(\alpha_1+\alpha_2)[(\nabla(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}),\nabla\mathbf{v}) + 2b(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u},\mathbf{v})] = (\mathbf{f},\mathbf{v}) \end{aligned} \tag{2.17}$$

avec la condition initiale (2.4).

Clairement, en restreignant l'ensemble des solutions de (2.1)-(2.5) à $L^\infty(0,T;V_2)$ avec dérivée première dans $L^\infty(0,T;V)$, cette formulation est équivalente à (2.1)-(2.5).

Comme il a été mentionné dans l'introduction, nous obtiendrons une équation de transport en prenant le **rot** de l'équation (2.1). Auparavant, nous avons besoin du résultat technique suivant.

Lemme 2.4 *Formellement, nous avons:*

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{v}) = \mathbf{u}.\nabla\mathbf{rot}\,\mathbf{v} - \mathbf{rot}\,\mathbf{v}.\nabla\mathbf{u} + \mathrm{div}\ \mathbf{u}\ \mathbf{rot}\,\mathbf{v} + \sum_{k=1}^{3} \nabla u_k \times \nabla v_k. \tag{2.18}$$

Démonstration. Considérons la première composante de $\mathbf{rot}(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{v})$

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot}(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{v}))_1 &= \sum_{k=1}^{3}\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}(u_k\frac{\partial v_3}{\partial x_k}) - \frac{\partial}{\partial x_3}(u_k\frac{\partial v_2}{\partial x_k})\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{3}\Big[u_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}) + \frac{\partial u_k}{\partial x_2}\frac{\partial v_3}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_3}\frac{\partial v_2}{\partial x_k}\Big] \\ &= (\mathbf{u}.\nabla\mathbf{rot}\,\mathbf{v})_1 + \sum_{k=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_2}\frac{\partial v_3}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_3}\frac{\partial v_2}{\partial x_k}\Big). \end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_2}\frac{\partial v_3}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_3}\frac{\partial v_2}{\partial x_k}\Big) &= -(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}.\nabla\mathbf{u})_1 - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}) + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) \\ &+ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ &= -(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}.\nabla\mathbf{u})_1 + \mathrm{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{rot}\,\mathbf{v})_1 + \sum_{k=1}^{3}(\nabla u_k \times \nabla v_k)_1. \end{aligned}$$

L'identité est donc vérifiée pour la première composante. On fait de même pour les autres composantes.
$\triangle$

Posons $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{u}$. Du Lemme 2.4 et $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, il suit d'une part que :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u})) = \mathbf{u}.\nabla(\Delta\boldsymbol{\omega}) - \Delta\boldsymbol{\omega}.\nabla\mathbf{u} + \sum_{k=1}^{3} \nabla u_k \times \nabla(\Delta u_k). \tag{2.19}$$

D'autre part, considérant $\mathbf{rot}(\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}))$:

$$\mathbf{rot}(\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u})) = \Delta(\mathbf{rot}(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u})) = \Delta(\mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\omega}) - \Delta(\boldsymbol{\omega}.\nabla\mathbf{u}).$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u})) = \Delta\mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}.\nabla(\Delta\boldsymbol{\omega}) - \Delta\boldsymbol{\omega}.\nabla\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}.\nabla(\Delta\mathbf{u})\\ +2\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k} - \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Finalement, l'identité

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w}.\nabla\mathbf{v} - \mathbf{v}.\nabla\mathbf{w} + (\operatorname{div}\mathbf{w})\mathbf{v} - (\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{w}$$

donne, compte tenu de $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u}) = \mathbf{u}.\nabla(\boldsymbol{\omega} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta\boldsymbol{\omega})\\ -(\boldsymbol{\omega} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta\boldsymbol{\omega}).\nabla\mathbf{u}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Ainsi, à partir de (2.1), nous déduisons formellement de (2.19), (2.20) et (2.21) l'équation de transport suivante:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{u}.\nabla(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}).\nabla\mathbf{u} - (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta\mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\omega}\\ &+(\alpha_1 + \alpha_2)[\boldsymbol{\omega}.\nabla(\Delta\mathbf{u}) + 2\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k} + \nabla u_k \times \nabla\,\Delta u_k)] = \mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Cette équation est formelle car le premier terme non-linéaire n'est pas défini à moins que $\mathbf{u}(t)$ n'appartienne à $H^4(\Omega)^3$.

3 Estimations *a priori*

Les estimations *a priori* de ce paragraphe sont formelles car elles sont appliquées à la solution exacte du problème (2.17), (2.4), dont la régularité n'est pas connue. Cependant, dans le prochain paragraphe, nous appliquerons ces estimations rigoureusement à la solution de l'approximation de Galerkin du problème (2.17), et nous savons, par construction, que cette solution est suffisamment régulière.

Il sera utile de définir dans V la norme suivante, qui est équivalente à la norme H^1:

$$\|\mathbf{v}\|_V = (\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_1|\mathbf{v}|^2_{H^1(\Omega)})^{1/2}. \tag{3.1}$$

Lemme 3.1 *Supposons que le problème (2.17), (2.4) ait une solution* $\mathbf{u}$ *dans* $C^0(0,T;V_2)$ *avec* $\mathbf{u}'$ *dans* $L^\infty(0,T;V)$*. Posons*

$$K_1 = \frac{\nu}{2(\mathcal{P}^2+\alpha_1)},\ \ K_2 = \frac{3}{\alpha_1}|\alpha_1+\alpha_2|C_1C(\alpha_1).$$

Alors cette solution satisfait l'inégalité suivante pour tout t *dans* $[0,T]$*:*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(t)\|_V \le e^{-K_1t}\|\mathbf{u}_0\|_V &+ \int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds\\ &-K_2\int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}(s)\|_{V_2})\|\mathbf{u}(s)\|_V\,ds.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Démonstration. On choisit $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans (2.17). La formule de Green et l'antisymétrie de b impliquent

$$\forall\mathbf{v}\in V_2,\ \ (\nabla(\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}),\nabla\mathbf{v}) = -(\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v},\Delta\mathbf{v}) = b(\mathbf{v};\Delta\mathbf{v},\mathbf{v}).$$

Utilisant l'égalité précédente, la relation $(\mathbf{w}\times\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0$ et la définition (3.1), (2.17) devient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2_V + \nu|\mathbf{u}(t)|^2_{H^1(\Omega)} + 3(\alpha_1+\alpha_2)b(\mathbf{u}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)) = (\mathbf{f}(t),\mathbf{u}(t)). \tag{3.3}$$

En remarquant que

$$\forall\mathbf{v}\in H^1_0(\Omega)^3\ ,\ \ \frac{1}{\mathcal{P}^2+\alpha_1}\|\mathbf{v}\|^2_V \le |\mathbf{v}|^2_{H^1(\Omega)} \le \frac{1}{\alpha_1}\|\mathbf{v}\|^2_V, \tag{3.4}$$

nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2_V + \frac{\nu}{\mathcal{P}^2+\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|^2_V \le |(\mathbf{f}(t),\mathbf{u}(t))| + 3|\alpha_1+\alpha_2||b(\mathbf{u}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t))|. \tag{3.5}$$

Puisque $\mathbf{v}$ appartient à V_2, nous déduisons facilement, par des applications de la formule de Green, que

$$b(\mathbf{v};\Delta\mathbf{v},\mathbf{v}) = \sum_{i,j,k=1}^{3}\int_\Omega v_k\frac{\partial^3 v_i}{\partial x_k\partial x_j^2}vi\,d\mathbf{x} = \sum_{i,j,k=1}^{3}\int_\Omega \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\,d\mathbf{x};$$

de là

$$\begin{aligned}|b(\mathbf{u}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t))| &\le (\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial u_k(t)}{\partial x_j}^2)^{1/2}\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}(\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j}^2\frac{\partial u_i(t)}{\partial x_k}^2)^{1/2}\,d\mathbf{x}\\ &\le \|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{u}(t)|^2_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Alors (2.15), (2.12) et (3.4) impliquent

$$|b(\mathbf{u}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t))| \leq \frac{C_1 C(\alpha_1)}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}\|\mathbf{u}(t)\|_V^2. \tag{3.6}$$

Puis

$$|(\mathbf{f}(t),\mathbf{u}(t))| \leq \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_V.$$

En substituant dans (3.5), en simplifiant par $\|\mathbf{u}(t)\|_V$ et en utilisant les constantes K_1 et K_2 définies dans l'énoncé du Lemme 3.1, nous obtenons pour tout t dans $[0,T]$:

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_V + 2\,K_1\|\mathbf{u}(t)\|_V \leq \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)} + K_2\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}\|\mathbf{u}(t)\|_V,$$

soit

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_V + K_1\|\mathbf{u}(t)\|_V \leq \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)} - K_2(\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}(t)\|_{V_2})\|\mathbf{u}(t)\|_V. \tag{3.7}$$

Alors nous déduisons (3.2) en multipliant les deux membres de (3.7) par $e^{K_1 t}$ et en intégrant de 0 à t.
$\triangle$

Remarque 3.2 *En contraste avec le cas $\alpha_1+\alpha_2=0$, le terme $\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}$ apparaît dans le membre de droite de (3.2) venant du terme $b(\mathbf{u}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t))$. Par conséquent l'inégalité (3.2) seule ne donne pas une estimation pour $\|\mathbf{u}(t)\|_V$. Nous compléterons (3.2) avec une estimation déduite de l'équation de transport, ce qui nous permettra de majorer simultanément $\|\mathbf{u}(t)\|_V$ et $\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}$ pour des données petites.*

Les lemmes qui suivent seront utiles dans les majorations que nous serons amenés à faire par la suite. Les constantes dans les majorations sont liées aux normes définies par (2.6).

Lemme 3.3 *Pour tout nombre p avec $1 \leq p \leq \infty$ et tout entier $m \geq 0$, les inégalités suivantes sont vérifiées:*

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \forall \mathbf{v}\in W^{1,p}(\Omega)^3,\ \|\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)} \leq \sqrt{2}\,\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)},\\
&(2)\quad \forall \mathbf{v}\in H^{m+1}(\Omega)^3,\ \|\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\|_{H^m(\Omega)} \leq \sqrt{2}\,\|\mathbf{v}\|_{H^{m+1}(\Omega)},\\
&(3)\quad \forall \mathbf{v}\in H^{m+2}(\Omega)^3,\ \|\Delta\mathbf{v}\|_{H^m(\Omega)} \leq \sqrt{3}\,\|\mathbf{v}\|_{H^{m+2}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Démonstration.
(1) Remarquons que

$$(\mathbf{rot}\,\mathbf{v})_1^2 + (\mathbf{rot}\,\mathbf{v})_2^2 + (\mathbf{rot}\,\mathbf{v})_3^2 \leq 2\sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})^2.$$

Alors (1) découle de

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_\Omega \left(\sqrt{(\mathbf{rot}\,\mathbf{v})_1^2 + (\mathbf{rot}\,\mathbf{v})_2^2 + (\mathbf{rot}\,\mathbf{v})_3^2}\right)^p d\mathbf{x}\\
&\leq 2^{p/2}\int_\Omega (\sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})^2)^{p/2}\,d\mathbf{x} = 2^{p/2}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)}^p.
\end{aligned}$$

(2) En commutant **rot** et ∂^α, nous avons

$$\|\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha(\mathbf{rot}\,\mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m} \|\mathbf{rot}(\partial^\alpha \mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Alors, utilisant (1), nous obtenons

$$\|\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\|^2_{H^m(\Omega)} \le 2 \sum_{|\alpha|\le m} \|\nabla(\partial^\alpha \mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

(3) Considérant que, pour tout $\mathbf{v}$ dans $H^2(\Omega)^3$,

$$\sum_{i=1}^{3}(\Delta v_i)^2 \le 3 \sum_{i,j=1}^{3} (\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2})^2 \le 3 \sum_{i=1}^{3}(\sum_{|\alpha|=2} (\partial^\alpha v_i)^2)),$$

nous avons, pour tout $\mathbf{v}$ dans $H^{m+2}(\Omega)^3$,

$$\begin{aligned}|\Delta \mathbf{v}|^2_{H^m(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha(\Delta\, v_i)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{|\alpha|=m} \|\Delta(\partial^\alpha v_i)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\le 3 \sum_{i=1}^{3} \sum_{|\alpha|=m+2} \|\partial^\alpha v_i\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

$\triangle$

Voyons ce qui concerne la majoration du produit vectoriel.

Lemme 3.4 *Soient* $\mathbf{u}$ *dans* $L^\infty(\Omega)^3$ *et* $\mathbf{v}$ *dans* $L^2(\Omega)^3$, *alors* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *est dans* $L^2(\Omega)^3$ *et*

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \le \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Soient $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *dans* $L^4(\Omega)^3$, *alors* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *est dans* $L^2(\Omega)^3$ *et*

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \le \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)}.$$

Démonstration. Remarquons que, si $|\,.\,|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$,

$$|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 = -(\mathbf{u}.\mathbf{v})^2 \le 0.$$

De là,

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \int_\Omega |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\, d\mathbf{x}.$$

Donc, si $\mathbf{u}$ est dans $L^\infty(\Omega)^3$ et $\mathbf{v}$ dans $L^2(\Omega)^3$, nous obtenons

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Enfin si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont dans $L^4(\Omega)^3$, en appliquant les inégalités de Hölder, nous avons

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|\mathbf{u}\|^2_{L^4(\Omega)}\|\mathbf{v}\|^2_{L^4(\Omega)}.$$

$\triangle$

Le troisième lemme concerne b.

Lemme 3.5 *Pour* $\mathbf{u}$ *dans* $L^2(\Omega)^3$, $\mathbf{v}$ *dans* $W^{1,\infty}(\Omega)^3$ *et* $\mathbf{w}$ *dans* $L^2(\Omega)^3$, *on a*

$$|b(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \le \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour $\mathbf{u}$ *dans* $L^\infty(\Omega)^3$, $\mathbf{v}$ *dans* $H^1(\Omega)^3$ *et* $\mathbf{w}$ *dans* $L^2(\Omega)^3$, *on a*

$$|b(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \le \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour $\mathbf{u}$ *dans* $L^4(\Omega)^3$, $\mathbf{v}$ *dans* $W^{1,4}(\Omega)^3$ *et* $\mathbf{w}$ *dans* $L^2(\Omega)^3$, *on a*

$$|b(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \le \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)}\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{w}$ *dans* $L^4(\Omega)^3$ *et* $\mathbf{v}$ *dans* $H^1(\Omega)^3$, *on a*

$$|b(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \le \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}|\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)}.$$

Démonstration. En appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz, discrètes et continues, nous obtenons

$$\begin{aligned}|b(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| &\le \int_\Omega (\sum_{i=1}^3(\sum_{k=1}^3 u_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k})^2)^{1/2}(\sum_{i=1}^3 w_i^2)^{1/2}\,d\mathbf{x}\\ &\le \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}(\int_\Omega(\sum_{k=1}^3 u_k^2)(\sum_{i,k=1}^3(\frac{\partial v_i}{\partial x_k})^2)\,d\mathbf{x})^{1/2}.\end{aligned}$$

De là, les deux premières inégalités. La troisième inégalité est déduite en appliquant Hölder à $\int_\Omega(\sum_{k=1}^3 u_k^2)(\sum_{i,k=1}^3(\frac{\partial v_i}{\partial x_k})^2)\,d\mathbf{x}$. Enfin par les mêmes procédés, on peut écrire

$$|b(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})| \le \int_\Omega(\sum_{i,k=1}^3(\frac{\partial v_i}{\partial x_k})^2)^{1/2}(\sum_{i,k=1}^3 u_k^2w_i^2)^{1/2}\,d\mathbf{x} \le |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}(\int_\Omega(\sum_{k=1}^3 u_k^2)(\sum_{i=1}^3 w_i^2)\,d\mathbf{x})^{1/2}.$$

D'où la dernière inégalité en appliquant de nouveau Hölder.
△

Théorème 3.6 *Supposons, en plus des hypothèses du Lemme 3.1, que* $\mathbf{u}$ *appartienne à* $L^1(0,T;H^4(\Omega)^3)$. *Alors* $y(t) = \|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}$ *satisfait l'inégalité différentielle dans* $[0,T]$:

$$\begin{gathered}y'(t) \le \frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}}(e^{-K_1t}\|\mathbf{u}_0\|_V + \int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds) + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ -C(\alpha_1,\alpha_2)(\frac{\nu}{\alpha_1C(\alpha_1,\alpha_2)} - y(t))y(t) - \frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}}K_2\int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - y(s))\|\mathbf{u}(s)\|_V\,ds \quad (3.8)\end{gathered}$$

où

$$C(\alpha_1,\alpha_2) = C_1C(\alpha_1) + |\alpha_1+\alpha_2|(C(\alpha_1))^2[(\sqrt{6}+2(\sqrt{3}+\sqrt{2}))C_1 + (\sqrt{6}+2\sqrt{2})C_2^{3/2}] \quad (3.9)$$

et K_1 *et* K_2 *sont définies dans le Lemme 3.1.*

Démonstration. Pour simplifier, posons $\mathbf{z} = \boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}$. Prendre le produit scalaire de (2.22) avec $\mathbf{z}$ donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2 + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2 - b(\mathbf{z}(t);\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t)) + (\alpha_1+\alpha_2)\{-b(\Delta\mathbf{u}(t);\boldsymbol{\omega}(t),\mathbf{z}(t))$$
$$+b(\boldsymbol{\omega}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t)) + 2\sum_{k=1}^{3}[b(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k};\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k},\mathbf{z}(t)) - b(\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k};\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k},\mathbf{z}(t))$$
$$+(\nabla u_k(t)\times\nabla\Delta u_k(t),\mathbf{z}(t))]\} = (\mathbf{rot}(\mathbf{f}(t)+\frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u}(t)),\mathbf{z}(t)). \quad (3.10)$$

Utilisant le Lemme 3.5, nous déduisons

$$|b(\mathbf{z}(t);\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t))| \le \|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Alors, (2.12) et (2.15) donnent

$$|b(\mathbf{z}(t);\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t))| \le C_1 C(\alpha_1)\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^3. \quad (3.11)$$

Ensuite le Lemme 3.5 et (2.16) impliquent

$$|b(\Delta\mathbf{u}(t);\boldsymbol{\omega}(t),\mathbf{z}(t))| \le \|\Delta\mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{\omega}(t)\|_{L^4(\Omega)}\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\le C_2^{3/2}\|\Delta\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors, du Lemme 3.3, nous déduisons

$$|b(\Delta\mathbf{u}(t);\boldsymbol{\omega}(t),\mathbf{z}(t))| \le \sqrt{6}C_2^{3/2}(C(\alpha_1))^2\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^3. \quad (3.12)$$

De nouveau le Lemme 3.5 permet d'écrire

$$|b(\boldsymbol{\omega}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t))| \le \|\boldsymbol{\omega}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}|\Delta\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors le Lemme 3.3, (2.12) et (2.15) donnent

$$|b(\boldsymbol{\omega}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t))| \le \sqrt{6}\,C_1(C(\alpha_1))^2\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^3. \quad (3.13)$$

De même, avec en plus Cauchy-Schwarz,

$$|\sum_{k=1}^{3}b(\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k};\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k},\mathbf{z}(t))| \le \|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\sum_{k=1}^{3}\|\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k}\|_{L^\infty(\Omega)}|\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k}|_{H^1(\Omega)}$$
$$\le \|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \sqrt{2}C_1(C(\alpha_1))^2\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^3. \quad (3.14)$$

Des arguments analogues donnent

$$|\sum_{k=1}^{3}b(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k};\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k},\mathbf{z}(t))| \le \|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\sum_{k=1}^{3}\|\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k}\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla(\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k})\|_{L^4(\Omega)}$$
$$\le \sqrt{2}C_2^{3/2}\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\sum_{k=1}^{3}\|\nabla(\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k})\|_{H^1(\Omega)}^2 \le \sqrt{2}C_2^{3/2}(C(\alpha_1))^2\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^3. \quad (3.15)$$

Enfin, du Lemme 3.4 et par les mêmes procédés, nous déduisons

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{k=1}^{3}(\nabla u_k(t)\times\nabla\Delta u_k(t),\mathbf{z}(t))| \le \|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\sum_{k=1}^{3}\|\nabla u_k(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla(\Delta u_k(t))\|_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad\le \|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}|\Delta\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)} \le \sqrt{3}\,C_1(C(\alpha_1))^2\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^3. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Finalement, observant que par suite de (3.4) et du Lemme 3.3

$$\|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \le \sqrt{2/\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_V,$$

et utilisant les majorations (3.11)-(3.16) dans (3.10), nous déduisons

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2+\frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2\\
&\le\left(\frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}}\|\mathbf{u}(t)\|_V+\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\right)\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}+C(\alpha_1,\alpha_2)\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^3,
\end{aligned}
$$

où $C(\alpha_1,\alpha_2)$ est définie par (3.9).

De là en posant $y(t)=\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}$ et en simplifiant par $y(t)$, nous obtenons

$$y'(t)\le\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}-C(\alpha_1,\alpha_2)\left(\frac{\nu}{\alpha_1C(\alpha_1,\alpha_2)}-y(t)\right)y(t)+\frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}}\|\mathbf{u}(t)\|_V$$

et (3.8) suit en substituant (3.2) dans cette inégalité.
$\triangle$

En l'absence d'information supplémentaire sur la solution $\mathbf{u}$, il est clair, à partir de l'inégalité différentielle (3.8), que nous ne pouvons pas prouver l'existence globale en temps de $\mathbf{u}$ à moins de montrer la majoration uniforme

$$\forall t>0, \|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}\le\min\left(\frac{\nu}{\alpha_1C(\alpha_1,\alpha_2)},\frac{K_1}{K_2}\right). \qquad (3.17)$$

Grâce à la décroissance exponentielle de certains termes de (3.8), nous prouverons que chaque solution continue de (3.8) satisfait (3.17) pour des données suffisamment petites. En premier lieu, nous supposons que $\mathbf{f}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^+;H(\mathbf{rot};\Omega))$; alors (3.8) est définie presque partout sur $\mathbb{R}^+$

Nous allons intégrer (3.8). Pour le faire, nous avons besoin du lemme d'intégration suivant.

Lemme 3.7 *Soit $A>0$. Si $h\in L^1(\mathbb{R}^+)$ et $t\ge 0$, alors*

$$\int_0^t ds\left(\int_0^s e^{-A(s-\tau)}h(\tau)\,d\tau\right)=\frac{1}{A}\int_0^t h(s)(1-e^{-A(t-s)})\,ds,$$

si, de plus, $h\ge 0$ sur $\mathbb{R}^+$

$$\int_0^t ds\left(\int_0^s e^{-A(s-\tau)}h(\tau)\,d\tau\right)\le\frac{1}{A}\int_0^t h(s)\,ds.$$

Démonstration. Par le théorème de Fubini, nous obtenons

$$\int_0^t ds \left(\int_0^s e^{-A(s-\tau)} h(\tau)\, d\tau \right) = \int_0^t h(\tau) e^{A\tau}\, d\tau \int_\tau^t e^{-As}\, ds$$
$$= \frac{1}{A} \int_0^t h(s)(1 - e^{-A(t-s)})\, ds.$$

△

Lemme 3.8 *Soit* $\mathbf{f}$ *appartenant à* $L^1(I\!R^+; H(\mathbf{rot}; \Omega))$. *Si les données satisfont*

$$\|\mathbf{u}_0\|_{V_2} + \frac{1}{K_1} \frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}} (\|\mathbf{u}_0\|_V + \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\, dt) + \int_0^\infty \|\mathbf{rot}\, \mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)} dt$$
$$< \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2} \right), \tag{3.18}$$

où $C(\alpha_1, \alpha_2)$ *est définie par (3.9) et* K_1 *et* K_2 *sont définies dans le Lemme 3.1, alors toute solution continue de (3.8) avec la valeur de départ* $y(0) = \|\mathbf{u}_0\|_{V_2}$ *satisfait*

$$\forall t \geq 0,\ \ 0 \leq y(t) \leq \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2} \right). \tag{3.19}$$

Démonstration. Intégrant (3.8) de 0 à t et utilisant le Lemme 3.7, nous déduisons

$$y(t) \leq y(0) + \frac{1}{K_1} \frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}} (\|\mathbf{u}_0\|_V + \int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}\, ds) + \int_0^t \|\mathbf{rot}\, \mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}\, ds$$
$$-C(\alpha_1, \alpha_2) \int_0^t \left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2)} - y(s) \right) y(s)\, ds$$
$$-\frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}} \frac{K_2}{K_1} \int_o^t \left(\frac{K_1}{K_2} - y(s) \right) \|\mathbf{u}(s)\|_V (1 - e^{-K_1(t-s)})\, ds.$$

Nous posons

$$M = \min\left(\frac{K_1}{K_2}, \frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2)} \right) \tag{3.20}$$

et

$$a(s,t) = C(\alpha_1, \alpha_2) y(s) + \frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}} \frac{K_2}{K_1} \|\mathbf{u}(s)\|_V (1 - e^{-K_1(t-s)}). \tag{3.21}$$

Pour $0 \leq s \leq t$, nous avons

$$y(s) \geq 0 \text{ et } (1 - e^{-K_1(t-s)}) \geq 0.$$

Utilisant (3.20) et (3.18), nous obtenons

$$y(t) \leq M - C(\alpha_1, \alpha_2) \int_0^t (M - y(s)) y(s)\, ds$$
$$-\frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}} \frac{K_2}{K_1} \int_0^t (M - y(s)) \|\mathbf{u}(s)\|_V (1 - e^{-K_1(t-s)})\, ds.$$

Puis la notation (3.21) permet d'écrire

$$y(t) < M - \int_0^t (M - y(s))a(s,t)\,ds. \tag{3.22}$$

Comme y est une solution continue de (3.8) et comme $0 \leq y(0) = \|\mathbf{u}_0\|_{V_2} < M$ du fait de (3.18), il y a un intervalle de temps sur lequel $y(t) < M$. Prouvons, par contradiction, que cet intervalle est $\mathbb{R}^+$. En effet, si cela n'était pas vrai, il existerait $t^* > 0$ tel que

$$\forall t < t^*, 0 \leq y(t) < M \text{ et } y(t^*) = M, \tag{3.23}$$

donc $y \leq M$ sur $[0, t^*]$ et, puisque $a(s,t) \geq 0$ pour $0 \leq s \leq t$, la relation (3.22) donne $y(t^*) < M$, ce qui contredit l'égalité dans (3.23).
$\triangle$

Bien sûr, la condition (3.18) est seulement satisfaite quand les données $\mathbf{f}$ et $\mathbf{u}_0$ sont suffisamment petites. Pour des raisons pratiques, il est intéressant d'évaluer de quelle petitesse elles devraient être. On choisit $\mathbf{u}_0$ dans V_2 et on pose

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^3(\Omega)} = \delta.$$

Alors pour des constantes positives $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, nous pouvons écrire

$$\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{P}_1\delta \text{ et } |\mathbf{u}_0|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{P}_2\delta.$$

1)<u>α_1 *grand*</u>.

En raison de la relation (2.10), on remplace $C(\alpha_1)$ par $\dfrac{\gamma\sqrt{2}}{\alpha_1}$; alors

$$\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2)} \sim \frac{\nu}{\sqrt{2}C_1\gamma + 2\gamma^2[(\sqrt{6} + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2}))C_1 + (\sqrt{6} + 2\sqrt{2})C_2^{\frac{3}{2}}]}$$

et

$$\frac{K_1}{K_2} \sim \frac{\nu}{6\sqrt{2}C_1\gamma}.$$

Posons

$$k_1 = \min\left(\frac{\nu}{\sqrt{2}C_1\gamma + 2\gamma^2[(\sqrt{6} + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2}))C_1 + (\sqrt{6} + 2\sqrt{2})C^{\frac{3}{2}}]}, \frac{\nu}{6\sqrt{2}C_1\gamma}\right).$$

D'après le Lemme 2.1, on a

$$\delta \leq C(\alpha_1)\|\mathbf{u}_0\|_{V_2},$$

et, utilisant la notation (3.20), si on veut imposer que

$$\|\mathbf{u}_0\|_{V_2} < \frac{1}{2}M,$$

ceci implique

$$\delta < \frac{k_1 \gamma}{\sqrt{2}\alpha_1}. \tag{3.24}$$

D'après (3.1), $\|\mathbf{u}_0\|_V = \sqrt{\mathcal{P}_1^2 + \alpha_1 \mathcal{P}_2^2}\, \delta$, donc

$$\frac{1}{K_1} \frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}} \|\mathbf{u}_0\|_V < \frac{1}{4}\, M$$

est vérifiée si

$$\delta < \frac{k_1}{8\sqrt{2}\mathcal{P}_2}. \tag{3.25}$$

Enfin, posons $\mathcal{M} = \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\, dt + \int_0^\infty \|\mathbf{rot}\, \mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\, dt$. Alors

$$\frac{1}{K_1} \frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}} \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\, dt + \int_0^\infty \|\mathbf{rot}\, \mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\, dt < \frac{1}{4}\, M$$

est vérifiée si

$$\mathcal{M} < \frac{1}{4}\, k_1. \tag{3.26}$$

Finalement, pour α_1 grand, les inégalités (3.24), (3.25) et (3.26) montrent que (3.18) est vérifiée si nous avons une majoration d'ordre $\dfrac{1}{\alpha_1}$ pour $\mathbf{u}_0$ et d'ordre 0 pour $\mathbf{f}$.

2)<u>α_1 *petit*</u>.

De même, grâce à la relation (2.10), on remplace $C(\alpha_1)$ par $\dfrac{\gamma}{\alpha_1^{3/2}}$. Alors

$$\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2)} \sim \frac{\nu \alpha_1}{\gamma^2[(\sqrt{6} + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2}))C_1 + (\sqrt{6} + 2\sqrt{2})C_2]}$$

et

$$\frac{K_1}{K_2} \sim \frac{\nu \alpha_1^{3/2}}{6 C_1 \gamma \mathcal{P}^2}.$$

Utilisant le Lemme 2.1, si on veut imposer

$$\|\mathbf{u}_0\|_{V_2} < \frac{1}{2}\, M,$$

ceci implique

$$\delta < \frac{\nu}{12 C_1 \mathcal{P}^2}. \tag{3.27}$$

Ensuite

$$\frac{1}{K_1} \frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}} \|\mathbf{u}_0\|_V < \frac{1}{4}\, M$$

est vérifiée si

$$\delta < \frac{\nu}{48\sqrt{2}\mathcal{P}_1 C_1 \gamma \mathcal{P}^4}\alpha_1^3. \tag{3.28}$$

Enfin

$$\frac{1}{K_1}\frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}}\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^\infty \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt < \frac{1}{4}\,M$$

est vérifiée si

$$\mathcal{M} < \frac{\nu}{48\sqrt{2}C_1 \gamma \mathcal{P}^4}\alpha_1^3. \tag{3.29}$$

Finalement, pour α_1 petit, les inégalités (3.27), (3.28) et (3.29) montrent que (3.18) est vérifiée si nous avons une majoration d'ordre α_1^3 pour $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{f}$.

Conclusion

Il suit de ces observations qu'en pratique, α_1 ne doit être ni trop petit, ni trop grand pour avoir une existence globale. En particulier, on peut remarquer que la condition en α_1^3, quand α_1 est petit, sera difficilement réalisée.

4 Unicité

Dans ce paragraphe, nous démontrons l'unicité d'une solution globale du problème (2.17), (2.4), si elle existe. Le premier lemme s'applique à tout couple de solutions de (2.17).

Lemme 4.1 *Soient* $\mathbf{u}_1$ *et* $\mathbf{u}_2$ *deux solutions de (2.17). Leur différence* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ *satisfait l'égalité*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_V^2 + \nu|\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)}^2 + b(\mathbf{u}(t);\mathbf{u}_2(t) - 2(\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}(t))\\ +b(\mathbf{u}(t);\Delta\mathbf{u}(t),(2\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{u}_2(t) + (\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{u}_1(t))\\ +b(2(\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{u}_1(t) - \alpha_1\mathbf{u}_2(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)) = 0.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Démonstration. En utilisant l'équation (2.17), on montre que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ est solution de l'équation

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_V^2 + \nu|\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)}^2 + (\mathbf{rot}(\mathbf{u}_1 - (2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}_1)\times\mathbf{u}_1,\mathbf{u})\\ -(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_2 - (2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}_2)\times\mathbf{u}_2,\mathbf{u}) + (\alpha_1+\alpha_2)(b(\mathbf{u}_1;\Delta\mathbf{u},\mathbf{u}_1) - b(\mathbf{u}_2;\Delta\mathbf{u},\mathbf{u}_2))\\ +2(\alpha_1+\alpha_2)(b(\mathbf{u}_1;\Delta\mathbf{u}_1,\mathbf{u}) - b(\mathbf{u}_2;\Delta\mathbf{u}_2,\mathbf{u}) = 0.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Nous pouvons vérifier que, formellement, pour tout $\mathbf{u}$ et tout $\mathbf{v}$,

$$((\mathbf{rot}\,\mathbf{u})\times\mathbf{v})_i = \sum_{k=1}^{3}(v_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - v_k\frac{\partial u_k}{\partial x_i}).$$

De là, nous obtenons la relation suivante, pour tout $\mathbf{u}$, tout $\mathbf{v}$ et tout $\mathbf{w}$

$$((\mathbf{rot}\,\mathbf{u})\times\mathbf{v},\mathbf{w}) = b(\mathbf{v};\mathbf{u},\mathbf{w}) - b(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v}). \tag{4.3}$$

De cette relation découlent les égalités suivantes

$$((\mathbf{rot}\,\mathbf{u}_1)\times\mathbf{u}_1,\mathbf{u}) - ((\mathbf{rot}\,\mathbf{u}_2)\times\mathbf{u}_2,\mathbf{u}) = b(\mathbf{u};\mathbf{u}_2,\mathbf{u}),$$

$$((\mathbf{rot}\,\Delta\mathbf{u}_1)\times\mathbf{u}_1,\mathbf{u}) - ((\mathbf{rot}\,\Delta\mathbf{u}_2)\times\mathbf{u}_2,\mathbf{u}) = b(\mathbf{u}_2;\Delta\mathbf{u},\mathbf{u}) - b(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u},\mathbf{u}_2).$$

Enfin, on vérifie que

$$b(\mathbf{u}_1;\Delta\mathbf{u},\mathbf{u}_1) - b(\mathbf{u}_2;\Delta\mathbf{u},\mathbf{u}_2) = b(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u},\mathbf{u}_1) + b(\mathbf{u}_2;\Delta\mathbf{u},\mathbf{u}),$$

$$b(\mathbf{u}_1;\Delta\mathbf{u}_1,\mathbf{u}) - b(\mathbf{u}_2;\Delta\mathbf{u}_2,\mathbf{u}) = b(\mathbf{u}_1;\Delta\mathbf{u},\mathbf{u}) + b(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u}_2,\mathbf{u}).$$

Ces égalités, substituées dans (4.2), donnent (4.1).
$\triangle$

Théorème 4.2 *Le problème (2.17), (2.4) a au plus une solution dans $L^\infty(0,T;V_2)$ pour tout $T>0$.*

Démonstration. Supposons que le problème (2.17), (2.4) ait deux solutions $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ dans $L^\infty(0,T;V_2)$ pour un quelconque $T>0$ et posons $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$. Soit $t\in[0,T]$. Par l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\forall\mathbf{v}\in V,\ \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} \le \sqrt{\mathcal{P}^2+1}\ |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.4}$$

D'après le Lemme 3.5, on a

$$|b(\mathbf{u}(t);\mathbf{u}_2(t)-2(\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}(t))| \le \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^4(\Omega)}|\mathbf{u}_2(t)-2(\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}_2(t)|_{H^1(\Omega)}.$$

Alors (2.16) et (4.4) impliquent

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^4(\Omega)} \le C_2^{3/2}(\mathcal{P}^2+1)|\mathbf{u}(t)|^2_{H^1(\Omega)},$$

et, puisque $\mathbf{u}_2\in L^\infty(0,T;V_2)$, (2.12) donne

$$|\mathbf{u}_2(t)-2(\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}_2(t)|_{H^1(\Omega)} \le (2|\alpha_1+\alpha_2|\sqrt{3}+1)C(\alpha_1)\|\mathbf{u}_2\|_{L^\infty(0,T;V_2)}.$$

Donc

$$|b(\mathbf{u}(t);\mathbf{u}_2(t)-2(\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}(t))| \le c_1(T)|\mathbf{u}(t)|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{4.5}$$

avec

$$c_1(T) = (2|\alpha_1+\alpha_2|\sqrt{3}+1)(\mathcal{P}^2+1)C(\alpha_1)C_2^{3/2}\|\mathbf{u}_2\|_{L^\infty(0,T;V_2)}.$$

Ensuite, comme dans la démonstration du Lemme 3.1, la formule de Green donne, pour tout $\mathbf{u}$ et tout $\mathbf{v}$ dans V_2,

$$b(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{3} b(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i};\mathbf{v},\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^{3} b(\mathbf{u};\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i},\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i}). \tag{4.6}$$

D'où, en utilisant de nouveau le Lemme 3.5, on a

$$|b(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq \|\nabla\mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega)}\sum_{i=1}^{3}\|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}\sum_{i=1}^{3}\|\nabla(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i})\|_{L^4(\Omega)}\|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)},$$

puis, grâce à Cauchy-Schwarz et à (2.16),

$$|b(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq \|\nabla\mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{u}|^2_{H^1(\Omega)} + C_2^{3/2}\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}\|\partial^2\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.7}$$

Enfin (2.12), (2.15) et (4.4) impliquent

$$|b(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq C(\alpha_1)(C_1 + C_2^{3/2}\sqrt{\mathcal{P}^2+1})\|\mathbf{v}\|_{V_2}|\mathbf{u}|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Alors, puisque $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont dans $L^\infty(0,T;V_2)$, cette inégalité nous permet d'écrire

$$|b(\mathbf{u}(t);\Delta\mathbf{u}(t),(2\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{u}_2(t)+(\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{u}_1(t)) \leq c_2(T)|\mathbf{u}(t)|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{4.8}$$

avec

$$c_2(T) = C(\alpha_1)(C_1+\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2})(|\alpha_1+\alpha_2|\|\mathbf{u}_1\|_{L^\infty(0,T;V_2)} + |2\alpha_1+\alpha_2|\|\mathbf{u}_2\|_{L^\infty(0,T;V_2)}).$$

De même

$$b(\mathbf{v};\Delta\mathbf{u},\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{3} b(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i};\mathbf{u},\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i}).$$

D'où, par suite du Lemme 3.5,

$$|b(\mathbf{v};\Delta\mathbf{u},\mathbf{u})| \leq |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)}\sum_{i=1}^{3}\|\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)},$$

puis, grâce à Cauchy-Schwarz,

$$|b(\mathbf{v};\Delta\mathbf{u},\mathbf{u})| \leq \|\nabla\mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{u}|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{4.9}$$

Ainsi

$$|b(\alpha_1\mathbf{u}_2(t) - 2(\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{u}_1(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t))| \leq c_3(T)|\mathbf{u}(t)|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{4.10}$$

avec

$$c_3(T) = C_1C(\alpha_1)(\alpha_1\|\mathbf{u}_2\|_{L^\infty(0,T;V_2)} + 2|\alpha_1+\alpha_2|\|\mathbf{u}_1\|_{L^\infty(0,T;V_2)}).$$

Substituant (4.5), (4.8) et (4.10) dans (4.1) et utilisant (3.4), nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2_V \leq 2\frac{c_1(T)+c_2(T)+c_3(T)}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|^2_V.$$

Alors l'inégalité de Gronwall et le fait que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ impliquent que $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ pour tout t dans $[0,T]$.
△

5 Existence de la solution

Dans ce paragraphe, nous supposons que la frontière Γ de Ω est de classe $C^{3,1}$ et que $\mathbf{f}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^+; H(\mathbf{rot};\Omega)) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$.

La solution du problème (2.17), (2.4) est construite au moyen d'une discrétisation de Galerkin. Comme l'injection $V_2 \subset V$ est compacte, le problème spectral

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v})_{V_2} = \lambda(\mathbf{w}, \mathbf{v})_V \ , \ \forall \mathbf{v} \in V_2,$$

où

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v})_V = (\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \alpha_1(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v})$$

a une suite de fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}$ dans V_2 correspondant à une suite de valeurs propres $\{\lambda_j\}$ telles que

$$(\mathbf{w}_j, \mathbf{v})_{V_2} = \lambda_j(\mathbf{w}_j, \mathbf{v})_V, \ \forall \mathbf{v} \in V_2 \tag{5.1}$$

avec

$$0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k < \ldots \to +\infty.$$

Les fonctions $\mathbf{w}_j$ forment une base orthonormale dans V et une base orthogonale dans V_2. Suivant l'approche de D. Cioranescu et E. H. Ouazar dans [9], cet ensemble de fonctions sera utilisé comme base spéciale dans la méthode de Galerkin-Faedo. Nous rappelons un lemme et une remarque démontrés dans [7]:

Lemme 5.1 *En plus des hypothèses du Lemme 2.1, supposons que Γ soit de classe $C^{3,1}$. Alors les fonctions propres de (5.1) appartiennent à $H^4(\Omega)^3$.*

Remarque 5.2 *Les fonctions propres de (5.1) appartiennent à $H^m(\Omega)^3$ pourvu que Γ soit de classe $C^{m-1,1}$ pour $m \geq 3$.*

Pour tout entier m positif, nous notons V_m l'espace vectoriel engendré par les m premières fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^m$ et P_m l'opérateur de projection orthogonale sur V_m pour le produit scalaire dans V_2. Nous définissons une solution approchée du problème (2.17), (2.4) par: chercher

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{j,m}(t)\mathbf{w}_j,$$

solution pour $1 \leq j \leq m$, de

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{w}_j) + \alpha_1(\nabla \mathbf{u}_m'(t), \nabla \mathbf{w}_j) + \nu(\nabla \mathbf{u}_m(t), \nabla \mathbf{w}_j) \\
&+(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m(t) - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta \mathbf{u}_m(t)) \times \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) \\
&+(\alpha_1 + \alpha_2)\{b(\mathbf{u}_m(t); \Delta \mathbf{w}_j, \mathbf{u}_m(t)) + 2\, b(\mathbf{u}_m(t); \Delta \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)\} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j),
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\mathbf{u}_m(0) = P_m(\mathbf{u}_0). \tag{5.3}$$

Ainsi nous avons à résoudre un système de m équations différentielles ordinaires d'ordre un et de degré deux, avec des coefficients constants et avec une condition initiale au temps $t=0$. Le facteur de $c'_{j,m}(t)$ est une matrice non singulière et le membre de droite $(\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^+) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^+)$ pour tout j. Alors des résultats classiques sur les EDO (*cf.* [10]) assurent qu'un tel système a une solution $\mathbf{u}_m$, unique et continue sur $[0, T^*_m]$ avec $\mathbf{u}'_m$ dans $L^\infty(0, T^*_m)$, pour un nombre $T^*_m > 0$. Nous nous proposons de démontrer que $\mathbf{u}_m(t)$ satisfait l'estimation *a priori* du Paragraphe 3.

En multipliant les deux membres de (5.2) par $c_{j,m}(t)$ et en sommant par rapport à j, nous obtenons sur $[0, T^*_m]$ l'égalité

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m(t)\|_V^2 + \nu|\mathbf{u}_m(t)|^2_{H^1(\Omega)} + 3(\alpha_1+\alpha_2)b(\mathbf{u}_m(t); \Delta\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t)). \quad (5.4)$$

Alors la démonstration du Lemme 3.1 s'applique à $\mathbf{u}_m$ sans modification et fournit le résultat suivant.

Lemme 5.3 *La solution $\mathbf{u}_m$ du problème (5.2), (5.3) satisfait l'inégalité suivante pour tout t dans $[0, T^*_m]$:*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_m(t)\|_V \le e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_m(0)\|_V + \int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds \\ -K_2\int_0^t e^{-K_1(t-s)}\left(\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}_m(s)\|_{V_2}\right)\|\mathbf{u}_m(s)\|_V\,ds,\end{aligned} \quad (5.5)$$

où K_1 et K_2 sont définies dans le Lemme 3.1.

Grâce à la base spéciale, nous pouvons aussi déduire de l'équation (5.2) une estimation pour $\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m(t))$. Nous définissons, tout d'abord, la fonction vectorielle $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{v}$ dans V_2:

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -\nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{rot}(\mathbf{v} - (2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{v}) \times \mathbf{v} + (\alpha_1+\alpha_2)(-\Delta(\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}) + 2\mathbf{v}.\nabla(\Delta\mathbf{v})). \quad (5.6)$$

Si $\mathbf{v}$ appartient à $H^4(\Omega)^3$, nous pouvons vérifier que $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ appartient à $H^1(\Omega)^3$. En effet, puisque $\mathbf{v}$ appartient à $W^{1,\infty}(\Omega)^3$,

$$\mathbf{rot}(\Delta\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i}) \times \mathbf{v},\ \mathbf{rot}(\Delta\mathbf{v}) \times \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i},\ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i}.\nabla(\Delta\mathbf{v}) \text{ et } \mathbf{v}.\nabla(\Delta\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i}) \text{ appartiennent à } L^2(\Omega)^3$$

et du fait que $H^2(\Omega)$ est une algèbre,

$$\Delta(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i}.\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}.\nabla\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i}) \text{ appartient à } L^2(\Omega)^3.$$

Alors, en raison du Lemme 5.1, $\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t))$ appartient à $H^1(\Omega)^3$. Ensuite pour chaque t, nous définissons $\mathbf{v}_m(t)$ dans V comme la solution du problème de Stokes:

$$\mathbf{v}_m(t) - \alpha_1\Delta\mathbf{v}_m(t) + \nabla q_m(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t). \quad (5.7)$$

Puisque $\mathbf{rot}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t))$ appartient à $L^2(\Omega)^3$, il suit du Lemme 2.1 que $\mathbf{v}_m(t)$ appartient à V_2. Substituer la définition de $\mathbf{F}$ dans (5.2) donne

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j)_V + (\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j) = 0,$$

et utiliser la définition (5.7) nous permet d'écrire

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j)_V + (\mathbf{v}_m(t), \mathbf{w}_j)_V = 0.$$

En multipliant cette équation par λ_j et en utilisant (5.1) et le fait que $\mathbf{u}'_m(t)$ et $\mathbf{v}_m(t)$ appartiennent tous les deux à V_2, nous obtenons, pour tout $1 \le j \le m$, l'équation discrétisée

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j)_{V_2} + (\mathbf{v}_m(t), \mathbf{w}_j)_{V_2} = 0. \tag{5.8}$$

Le théorème suivant est l'analogue du Théorème 3.6.

Théorème 5.4 *Supposons que* $\mathbf{f}$ *appartienne à* $L^1(I\!R^+; H(\mathbf{rot};\Omega)) \bigcap L^\infty(I\!R^+; L^2(\Omega)^3)$ *et que* Γ *soit de classe* $C^{3,1}$*. Alors* $y(t) = \|\mathbf{u}_m(t)\|_{V_2}$ *satisfait l'inégalité différentielle dans* $[0, T_m^*]$*:*

$$y'(t) \le \frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}}(e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_m(0)\|_V + \int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds) + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}$$
$$-C(\alpha_1,\alpha_2)(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)} - y(t))y(t) - \frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}}K_2\int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - y(s))\|\mathbf{u}_m(s)\|_V\,ds, \tag{5.9}$$

où $C(\alpha_1,\alpha_2)$ *est définie par (3.9) et* K_1 *et* K_2 *sont définies dans le Lemme 3.1.*

Démonstration. En multipliant les deux membres de (5.8) par $c_{j,m}(t)$ et en sommant sur j, nous obtenons

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t))_{V_2} + (\mathbf{v}_m(t), \mathbf{u}_m(t))_{V_2} = 0.$$

Poser $\boldsymbol{\omega}_m(t) = \mathbf{rot}\ \mathbf{u}_m(t)$ et utiliser le fait que

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v}_m(t) - \alpha_1\Delta\mathbf{v}_m(t)) = \mathbf{rot}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t))$$

donnent

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m(t)\|_{V_2}^2 + (\mathbf{rot}\ \mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)), \boldsymbol{\omega}_m(t) - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m(t)) = (\mathbf{rot}\ \mathbf{f}(t), \boldsymbol{\omega}_m(t) - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m(t)). \tag{5.10}$$

Grâce au Lemme 2.4 et à (2.19), (2.20) et (2.21), nous déduisons, après suppression de l'indice m et la variable t pour simplifier les notations:

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}.\nabla(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}).\nabla\mathbf{u} - \nu\Delta\boldsymbol{\omega} - (\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\omega}$$
$$+(\alpha_1+\alpha_2)\boldsymbol{\omega}.\nabla(\Delta\mathbf{u}) + 2(\alpha_1+\alpha_2)\sum_{k=1}^{3}[\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k} + \nabla u_k \times \nabla(\Delta u_k)]. \tag{5.11}$$

En substituant cette expression dans (5.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_{V_2}^2+\frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}\|_{V_2}^2-b(\boldsymbol{\omega}-\alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega};\mathbf{u},\boldsymbol{\omega}-\alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega})\\
&+(\alpha_1+\alpha_2)[-b(\Delta\mathbf{u};\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}-\alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega})+b(\boldsymbol{\omega};\Delta\mathbf{u},\boldsymbol{\omega}-\alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega})\\
&+2\sum_{k=1}^{3}\{b(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k};\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k},\boldsymbol{\omega}-\alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega})-b(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k};\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k},\boldsymbol{\omega}-\alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega})\\
&+(\nabla u_k\times\nabla\Delta u_k,\boldsymbol{\omega}-\alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega})\}]=(\mathbf{rot}\,\mathbf{f}+\frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u},\boldsymbol{\omega}-\alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}).
\end{aligned}\tag{5.12}$$

On est exactement dans la même situation que dans le Théorème 3.6 et la même démonstration donne (5.9).
△

Considérons une solution de (5.9) avec la valeur initiale

$$y(0)=\|\mathbf{u}_m(0)\|_{V_2}=\|P_m(\mathbf{u}_0)\|_{V_2}.$$

L'opérateur P_m est l'opérateur de projection orthogonale de V sur V_m pour le produit scalaire dans V et de V_2 sur V_m pour le produit scalaire dans V_2. Les propriétés de convergence de P_m impliquent

$$\lim_{m\to\infty}\|\mathbf{u}_m(0)\|_{V_2}=\|\mathbf{u}_0\|_{V_2}\text{ et }\lim_{m\to\infty}\|\mathbf{u}_m(0)\|_{V}=\|\mathbf{u}_0\|_{V}.$$

Donc si $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{f}$ satisfont (3.18), alors pour tout m suffisamment grand, $\mathbf{u}_m(0)$ et $\mathbf{f}$ satisferont l'analogue de (3.18):

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_m(0)\|_{V_2}+\frac{1}{K_1}\frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}}(\|\mathbf{u}_m(0)\|_V+\int_0^\infty\|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt)+\int_0^\infty\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt\\
<\min\left(\frac{\nu}{\alpha_1C(\alpha_1,\alpha_2)},\frac{K_1}{K_2}\right).
\end{aligned}\tag{5.13}$$

De là, la conclusion du Lemme 3.8 implique que $T_m^*=\infty$ et que $\mathbf{u}_m(t)$ est uniformément bornée dans V_2 par rapport au temps:

$$\forall t\geq 0,\|\mathbf{u}_m(t)\|_{V_2}\leq\min\left(\frac{\nu}{\alpha_1C(\alpha_1,\alpha_2)},\frac{K_1}{K_2}\right).\tag{5.14}$$

Alors l'équivalence de normes du Lemme 2.1, (5.5) et (5.14) impliquent que la suite $\{\mathbf{u}_m\}_{m\geq1}$ est bornée par rapport à m dans $L^\infty(\mathbb{R}^+;H^3(\Omega)^3)\bigcap L^1(\mathbb{R}^+;H^1(\Omega)^3)$.

Le lemme suivant donne une borne pour $\mathbf{u}_m'(t)$.

Lemme 5.5 *Soit* $\mathbf{f}$ *élément de* $L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2(\Omega)^3)$ *et supposons que la suite* $\{\mathbf{u}_m\}_{m\geq1}$ *soit bornée par rapport à* m *dans* $L^\infty(\mathbb{R}^+;H^3(\Omega)^3)$*. Alors la suite* $\{\mathbf{u}_m'\}_{m\geq1}$ *est bornée par rapport à* m *dans* $L^\infty(\mathbb{R}^+;V)$*.*

Démonstration. Multiplions les deux membres de (5.2) par $c'_{jm}(t)$ et sommons sur j. Cela donne

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}'_m(t)\|_V^2 &= \nu(\Delta\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}'_m(t)) - (\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m(t)-(2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}_m(t))\times\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}'_m(t))\\ &-(\alpha_1+\alpha_2)(b(\mathbf{u}_m(t);\Delta\mathbf{u}'_m(t),\mathbf{u}_m(t))+2b(\mathbf{u}_m(t);\Delta\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}'_m(t)))+(\mathbf{f}(t),\mathbf{u}'_m(t)).\end{aligned} \tag{5.15}$$

En utilisant (4.3), nous obtenons

$$\begin{aligned}(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m(t)-(2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}_m(t))\times\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}'_m(t)) &= b(\mathbf{u}_m(t);\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}'_m(t))\\ -(2\alpha_1+\alpha_2)b(\mathbf{u}_m(t);\Delta\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}'_m(t)) &+ (2\alpha_1+\alpha_2)b(\mathbf{u}'_m(t);\Delta\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t)).\end{aligned}$$

Alors, l'équation (5.15) s'écrit

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}'_m(t)\|_V^2 &= \nu(\Delta\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}'_m(t)) - b(\mathbf{u}_m(t);\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}'_m(t))\\ &-\alpha_2 b(\mathbf{u}_m(t);\Delta\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}'_m(t)) - (2\alpha_1+\alpha_2)b(\mathbf{u}'_m(t);\Delta\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t))\\ &-(\alpha_1+\alpha_2)b(\mathbf{u}_m(t);\Delta\mathbf{u}'_m(t),\mathbf{u}_m(t))+(\mathbf{f}(t),\mathbf{u}'_m(t)).\end{aligned} \tag{5.16}$$

De manière similaire à (4.6), nous avons, supprimant temporairement l'indice m:

$$b(\mathbf{u}(t);\Delta\mathbf{u}'(t),\mathbf{u}(t)) = \sum_{j=1}^{3} b(\mathbf{u}(t);\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_j},\frac{\partial\mathbf{u}'(t)}{\partial x_j}) + \sum_{j=1}^{3} b(\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_j};\mathbf{u}(t),\frac{\partial\mathbf{u}'(t)}{\partial x_j}).$$

D'où, en utilisant le Lemme 3.5, nous avons

$$\begin{aligned}|b(\mathbf{u}(t);\Delta\mathbf{u}'(t),\mathbf{u}(t)| &\le \|\mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)}\sum_{j=1}^{3}\|\nabla(\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_j})\|_{L^4(\Omega)}\|\frac{\partial\mathbf{u}'(t)}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)}\\ &+|\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)}\sum_{j=1}^{3}\|\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_j}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\frac{\partial\mathbf{u}'(t)}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

et donc, grâce à Cauchy-Schwarz et à (2.16), (2.15) et (4.4),

$$|b(\mathbf{u}_m(t);\Delta\mathbf{u}'_m(t),\mathbf{u}_m(t))| \le (\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}+C_1)|\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{u}_m(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{u}'_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{5.17}$$

Ensuite, l'antisymétrie de b donne

$$b(\mathbf{u}_m(t);\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}'_m(t)) = -b(\mathbf{u}_m(t);\mathbf{u}'_m(t),\mathbf{u}_m(t)),$$

et, utilisant le Lemme 3.5, (2.16) et (4.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}|b(\mathbf{u}_m(t);\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}'_m(t))| &\le \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^2|\mathbf{u}'_m(t)|_{H^1(\Omega)}\\ &\le \sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}|\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{u}_m(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{u}'_m(t)|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{5.18}$$

De même les Lemmes 3.5 et 3.3, avec les majorations (4.4) et (2.16), donnent

$$\begin{aligned}|b(\mathbf{u}_m(t);\Delta\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}'_m(t))| &\le \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^4(\Omega)}|\Delta\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{u}'_m(t)\|_{L^4(\Omega}\\ &\le \sqrt{3}(\mathcal{P}^2+1)C_2^{3/2}|\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{u}_m(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{u}'_m(t)|_{H^1(\Omega)}\end{aligned} \tag{5.19}$$

et

$$
\begin{aligned}
|b(\mathbf{u}'_m(t);\Delta\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t))| &\le \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{L^4(\Omega)}|\Delta\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^4(\Omega)}\\
&\le \sqrt{3}(\mathcal{P}^2+1)C_2^{3/2}|\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{u}_m(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{u}'_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \quad (5.20)
\end{aligned}
$$

En utilisant les inégalités (5.17), (5.18), (5.19) et (5.20) dans (5.16), ayant majoré $\sqrt{\mathcal{P}^2+1}$ par $\mathcal{P}^2+1$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}'_m(t)\|_V^2 \le \nu|\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{u}'_m(t)|_{H^1(\Omega)} &+ \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\\
&+k\|\mathbf{u}_m(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{u}'_m(t)|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

avec

$$k = (\alpha_1+|\alpha_2|)(C_1+(2\sqrt{3}+1)(\mathcal{P}^2+1)C_2^{3/2})+(\mathcal{P}^2+1)C_2^{3/2}.$$

Utiliser (2.7) et (3.4), puis simplifier par $\|\mathbf{u}'_m(t)\|_V$ donnent

$$\|\mathbf{u}'_m(t)\|_V \le \frac{1}{\alpha_1}(|\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}(\nu+k\|\mathbf{u}_m(t)\|_{H^3(\Omega)})+\mathcal{P}\|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}).$$

Etant donné que k est indépendant de m et t, les hypothèses ci-dessus sur $\mathbf{u}_m$ et $\mathbf{f}$ impliquent que le membre de droite de cette inégalité est borné sur $\mathbb{R}^+$ uniformément par rapport à m. Donc la suite $\{\mathbf{u}'_m\}_{m\ge1}$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^+;V)$.
$\triangle$

Le théorème suivant récapitule les majorations obtenues pour les suites $\{\mathbf{u}_m\}$ et $\{\mathbf{u}'_m\}$.

Théorème 5.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, borné et simplement connexe, avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Soient la vitesse initiale $\mathbf{u}_0$ donnée dans V_2 et le membre de droite $\mathbf{f}$ donné dans $L^1(\mathbb{R}^+;H(\mathbf{rot};\Omega))\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2(\Omega)^3)$, suffisamment petits pour satisfaire*

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_0\|_{V_2} + \frac{1}{K_1}\frac{\nu\sqrt{2}}{\alpha_1^{3/2}}(\|\mathbf{u}_0\|_V + \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt) + \int_0^\infty \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt\\
< \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)},\frac{K_1}{K_2}\right), \quad (5.21)
\end{aligned}
$$

avec $C(\alpha_1,\alpha_2)$ définie par (3.9) et K_1 et K_2 définies dans le Lemme 3.1. Alors pour tout m suffisamment grand, la solution unique $\mathbf{u}_m$ de la méthode de Galerkin (5.2), (5.3) existe pour tout temps $t\ge0$ et satisfait les bornes supérieures:

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;V_2)} &\le \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)},\frac{K_1}{K_2}\right),\\
\|\mathbf{u}_m\|_{L^1(\mathbb{R}^+;H^1(\Omega)^3)} &\le k_1, \quad (5.22)\\
\|\mathbf{u}'_m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;V)} &\le k_2,
\end{aligned}
$$

où k_1 et k_2 sont des constantes indépendantes de m.

Il reste à passer à la limite par rapport à m. Il suit de la première et de la dernière inégalité dans (5.22) qu'il existe une fonction $\mathbf{u}$ et une sous-suite de $\{\mathbf{u}_m\}$, encore notée $\{\mathbf{u}_m\}$, telles que

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(\mathrm{I\!R}^+; V_2),$$
$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}'_m = \mathbf{u}' \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(\mathrm{I\!R}^+; V).$$

D'une part, cela implique que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathrm{I\!R}^+; V_2)} \leq \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right)$$

et pour tout $T > 0$

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ dans } H^1(0, T; H^1(\Omega)^3) \text{ faible.}$$

L'application $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}(0)$ est linéaire continue de $H^1(0, T; H^1(\Omega)^3)$ dans $H^1(\Omega)^3$ pour les topologies fortes, donc aussi pour les topologies faibles. D'où

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}(0) \text{ dans } H^1(\Omega)^3 \text{ faible,}$$

mais

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_0 \text{ dans } V \text{ fort.}$$

Ainsi

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

D'autre part, pour tout $T > 0$, $\{\mathbf{u}_m\}_{m\geq 0}$ est borné dans l'espace

$$W = \{\mathbf{v} \in L^2(0, T; H^3(\Omega)^3), \mathbf{v}' \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^3)\}.$$

D'après [22], l'injection de W dans $L^2(0, T; H^2(\Omega)^3)$ est compacte; ainsi

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ dans } L^2(0, T; H^2(\Omega)^3) \text{ fort}$$

et bien sûr

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ dans } L^2(\Omega\times]0, T[)^3 \text{ fort.}$$

Utilisant le théorème de convergence dominée et l'antisymétrie de b, ces convergences impliquent que, pour tout $T > 0$, pour tout entier positif j et pour toute fonction ψ dans $L^2(0, T)$, les quatre termes non-linéaires dans (5.2) convergent comme suit:

$$\int_0^T b(\mathbf{u}_m(t); \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)\psi(t)\, dt \to \int_0^T b(\mathbf{u}(t); \mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j)\psi(t)\, dt,$$
$$\int_0^T b(\mathbf{u}_m(t); \Delta\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)\psi(t)\, dt \to \int_0^T b(\mathbf{u}(t); \Delta\mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j)\psi(t)\, dt,$$
$$\int_0^T b(\mathbf{w}_j; \Delta\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t))\psi(t)\, dt \to \int_0^T b(\mathbf{w}_j; \Delta\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t))\psi(t)\, dt,$$

$$\int_0^T b(\mathbf{u}_m(t);\Delta\mathbf{w}_j,\mathbf{u}_m(t))\psi(t)\,dt \to \int_0^T b(\mathbf{u}(t);\Delta\mathbf{w}_j,\mathbf{u}(t))\psi(t)\,dt.$$

De là, on passe à la limite dans (5.2) et on déduit que $\mathbf{u}$ est solution du problème (2.17), (2.4) et puisque cette solution est unique, la suite entière $\mathbf{u}_m$ converge vers $\mathbf{u}$. Ceci établit le principal théorème de ce paragraphe.

Théorème 5.7 *Sous les hypothèses du Théorème 5.6, le problème (2.17), (2.4) a une et une seule solution* $\mathbf{u}$ *qui existe pour tout temps* $t \geq 0$*. De plus,* $\mathbf{u}$ *appartient à* $L^\infty(I\!R^+;V_2)$*,* $\mathbf{u}'$ *à* $L^\infty(I\!R^+;V)$ *et* $\mathbf{u}$ *est uniformément borné dans* V_2 *par rapport au temps:*

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(I\!R^+;V_2)} \leq \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)},\frac{K_1}{K_2}\right), \tag{5.23}$$

où $C(\alpha_1,\alpha_2)$ *est définie par (3.9) et* K_1 *et* K_2 *sont définies dans le Lemme 3.1.*

6 Régularité additionnelle

Dans ce paragraphe, nous supposons que le problème (2.17), (2.4) a une solution $\mathbf{u}$ dans $L^\infty(0,T;V_2)$ avec $\mathbf{u}'$ dans $L^\infty(0,T;V)$, qui n'est pas nécessairement globale. Prenons $\mathbf{f}$ et $\mathbf{rot}\ \mathbf{f}$ dans $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$, $\mathbf{u}_0$ dans $H^4(\Omega)^3$ et $\Gamma = \bigcup_{i=0}^p \Gamma_i$ (Γ_i *connexe*) de classe $C^{3,1}$. Nous nous proposons de montrer que $\mathbf{rot}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})$ appartient à $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$. Etant donné la Remarque 2.3, ceci implique que $\mathbf{u}$ est dans $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$. En fait la méthode de ce paragraphe est générale et peut être appliquée pour déduire toute régularité pour $\mathbf{u}$.

En premier lieu, nous allons définir une application linéaire $\mathbf{g}$ de $L^2(\Omega)^3$ dans $H^2(\Omega)^3$ telle que $\mathbf{g}(\mathbf{rot}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})) = \mathbf{rot}\ \mathbf{u}$. Ensuite, de l'équation (2.22), utilisant l'application $\mathbf{g}$, nous déduirons une équation de transport, dont $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})$ est une solution particulière dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$. Puis nous montrerons que cette équation a une solution dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et, enfin, qu'elle n'a pas plus d'une solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$. Par conséquent l'unique solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ est $\mathbf{rot}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})$, de là $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$.

6.1 Définition et propriétés de g

Nous définissons

$$G = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3; \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0, <\mathbf{v}.\mathbf{n},1>_{\Gamma_i} = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq p\}.$$

C'est un sous-espace fermé de $H(\mathrm{div};\Omega)$, donc de $L^2(\Omega)^3$ (les normes $\|\ \|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\ \|_{H(\mathrm{div};\Omega)}$ coïncident sur G). Soit P_G l'opérateur de projection orthogonale sur G pour le produit scalaire dans $L^2(\Omega)^3$. Soit $\mathbf{z}$ un élément de $L^2(\Omega)^3$ et soit

$$\mathbf{y}_\mathbf{z} = P_G(\mathbf{z}).$$

Comme Ω est simplement connexe, il existe un unique vecteur potentiel $\boldsymbol{\phi}_\mathbf{z}$ tel que

$$\mathbf{y}_\mathbf{z} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\phi}_\mathbf{z} \text{ et } \mathrm{div}\ \boldsymbol{\phi}_\mathbf{z} = 0 \text{ dans } \Omega\ ,\ \boldsymbol{\phi}_\mathbf{z}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

De plus, la régularité de Γ implique que $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{z}}$ appartient à $H^1(\Omega)^3$ et il existe une constante C_1' telle que

$$\|\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{z}}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1'\|\mathbf{y}_{\mathbf{z}}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1'\|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ensuite nous définissons $\mathbf{v}_{\mathbf{z}}$ comme la solution dans V du problème de Stokes:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{z}} - \alpha_1\Delta\mathbf{v}_{\mathbf{z}} + \nabla\pi_{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{z}}.$$

La régularité de Γ implique que $\mathbf{v}_{\mathbf{z}}$ appartient à $H^3(\Omega)^3$ et il existe une constante C_2' telle que

$$\|\mathbf{v}_{\mathbf{z}}\|_{H^3(\Omega)} \leq C_2'\|\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{z}}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Nous posons

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{rot}\ \mathbf{v}_{\mathbf{z}}. \tag{6.1}$$

Alors les inégalités ci-dessus nous permettent d'obtenir

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|_{H^2(\Omega)} \leq C'\|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6.2}$$

avec $C' = \sqrt{2}C_1'C_2'$. Nous allons démontrer deux lemmes qui établissent des propriétés de $\mathbf{g}$ qui seront utiles par la suite.

Lemme 6.1 *Soit* $\mathbf{g}$ *défini par (6.1). Si* $\mathbf{u} \in V_2$*, alors*

$$\mathbf{g}(\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})) = \mathbf{rot}\ \mathbf{u}.$$

Démonstration. Posons $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$. Alors $\mathbf{z}$ appartient à $L^2(\Omega)^3$. De plus

$$\text{div } \mathbf{z} = 0 \text{ et } < \mathbf{z}.\mathbf{n}, 1 >_{\Gamma_i} = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq p.$$

De là $\mathbf{z} \in G$. Alors

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) = \mathbf{z} = \mathbf{y}_{\mathbf{z}} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{z}} = \mathbf{rot}(\mathbf{v}_{\mathbf{z}} - \alpha_1\Delta\mathbf{v}_{\mathbf{z}}).$$

Comme Ω est simplement connexe, cela implique

$$\mathbf{v}_{\mathbf{z}} = \mathbf{u}.$$

Donc

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{rot}\,\mathbf{u}.$$

$\triangle$

Avant de démontrer le deuxième lemme, nous allons rappeler un résultat démontré dans [3]. Soit q_i^N l'unique solution dans $H^1(\Omega)$ du problème

$$\left\{\begin{array}{c} -\Delta q_i^N = 0 \text{ dans } \Omega, \\ q_i^N|_{\Gamma_0} = 0 \text{ et } q_i^N|_{\Gamma_k} = \text{constante},\ 1 \leq k \leq p, \\ < \nabla q_i^N.\mathbf{n}, 1 >_{\Gamma_0} = -1 \text{ et } < \nabla q_i^N.\mathbf{n}, 1 >_{\Gamma_k} = \delta_{ik}\ ,\ 1 \leq k \leq p. \end{array}\right.$$

Proposition 6.2 *Les fonctions* ∇q_i^N, $1 \leq i \leq p$, *engendrent l'espace* $K_N(\Omega)$*:*

$$K_N(\Omega) = \{\mathbf{w} \in X(\Omega); \mathbf{rot}\ \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \text{div } \mathbf{w} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \mathbf{w} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega\},$$

où

$$X(\Omega) = H(\mathbf{rot}; \Omega) \bigcap H(\text{div}; \Omega).$$

Lemme 6.3 *En plus des hypothèses du Lemme 2.1, supposons que* Γ *soit de classe* $C^{3,1}$*. Alors l'application* $\mathbf{g}$ *définie sur* $L^2(\Omega)^3$ *est un opérateur linéaire continu de* $H^1(\Omega)^3$ *dans* $H^3(\Omega)^3$ *et il existe une constante* C'' *telle que*

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|_{H^3(\Omega)} \leq C'' \|\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.3}$$

Démonstration. Soit $\mathbf{z}$ un élément de $H^1(\Omega)^3$. Posons

$$\mathbf{w_z} = \nabla p_{\mathbf{z}} + \sum_{i=1}^{p} < (\mathbf{z} - \nabla p_{\mathbf{z}}).\mathbf{n}, 1 >_{\Gamma_i} \nabla q_i^N, \tag{6.4}$$

où $p_{\mathbf{z}}$ est la solution du problème de Dirichlet:

$$\Delta p_{\mathbf{z}} = \text{div } \mathbf{z} \qquad \text{avec } p_{\mathbf{z}} \in H_0^1(\Omega),$$

et chaque q_i^N, la solution dans $H^1(\Omega)$ du problème énoncé ci-dessus.

1^o) Montrons que $\mathbf{z} - \mathbf{w_z} \in G$. Par suite de la régularité du problème de Dirichlet et du fait que, pour tout entier $m \geq 1$, $K_N(\Omega)$ s'injecte continuement dans $H^m(\Omega)^3$ pourvu que Γ soit de classe $C^{m,1}$, $\mathbf{w}_z$ appartient à $H^1(\Omega)^3$. Ensuite

$$\text{div}(\mathbf{z} - \mathbf{w_z}) = \text{div}\, \mathbf{z} - \Delta p_{\mathbf{z}} = 0.$$

Enfin pour $0 \leq i \leq p$

$$< (\mathbf{z} - \mathbf{w_z}).\mathbf{n}, 1 >_{\Gamma_i} = 0,$$

puisque $< \nabla q_i^N.\mathbf{n}, 1 >_{\Gamma_k} = \delta_{ik}$ pour $1 \leq i, k \leq p$ et $\text{div}(\mathbf{z} - \nabla p_{\mathbf{z}}) = 0$.

2^o) Montrons que $\mathbf{w_z} \in G^\perp$. La formule de Green donne

$$\forall \mathbf{y} \in G,\ (\nabla p_{\mathbf{z}}, \mathbf{y}) = -(\text{div}\, \mathbf{y}, p_{\mathbf{z}}) + < \mathbf{y}.\mathbf{n}, p_{\mathbf{z}} >_\Gamma = 0. \tag{6.5}$$

De plus

$$\forall \mathbf{y} \in G,\ \mathbf{y} = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\varphi} \text{ avec } \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega)^3,$$

alors pour $1 \leq i \leq p$, d'après une formule de Green,

$$(\nabla q_i^N, \mathbf{y}) = (\nabla q_i^N, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\varphi}) = (\mathbf{rot}(\nabla q_i^N), \boldsymbol{\varphi}) - < \nabla q_i^N \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\varphi} >_\Gamma .$$

Mais ∇q_i^N appartient à $K_N(\Omega)$, donc

$$\forall \mathbf{y} \in G,\ (\nabla q_i^N, \mathbf{y}) = 0. \tag{6.6}$$

Finalement, nous déduisons de (6.4), (6.5) et (6.6) que $\mathbf{w_z}$ appartient à $G^\perp$. Puisque $\mathbf{z}-\mathbf{w_z}$ est dans G et $\mathbf{w_z}$ dans $G^\perp$, cela implique

$$\mathbf{z} - \mathbf{w_z} = P_G(\mathbf{z}).$$

En posant $\mathbf{y_z} = P_G(\mathbf{z})$, nous obtenons

$$\mathbf{z} = \mathbf{y_z} + \mathbf{w_z},$$

où $\mathbf{y_z} \in G \cap (H^1(\Omega)^3)$ et $\mathbf{w_z} \in G^\perp \cap (H^1(\Omega)^3)$.

3^o) Montrons que l'application $\mathbf{z} \longmapsto \mathbf{y_z}$ est un opérateur linéaire continu de $H^1(\Omega)^3$ dans $H^1(\Omega)^3$. D'une part, la régularité du problème de Dirichlet implique que $p_\mathbf{z}$ appartient à $H^2(\Omega)$ et qu'il existe une constante C_0'' telle que

$$\|\nabla p_\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_0'' \, \|\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'autre part, par suite de la régularité de $K_N(\Omega)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \| \sum_{i=1}^{p} < (\mathbf{z} - \nabla p_\mathbf{z}).\mathbf{n}, 1 >_{\Gamma_i} \nabla q_i^N \|_{H^1(\Omega)} &\leq \sum_{i=1}^{p} \|\mathbf{z} - \nabla p_\mathbf{z}\|_{L^2(\Gamma_i)} |\Gamma_i|^{1/2} \|\nabla q_i^N\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \max_{i=1,\ldots,p} (\|\nabla q_i^N\|_{H^1(\Omega)}) \, |\Gamma| \, \|\mathbf{z} - \nabla p_\mathbf{z}\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Mais il existe une constante C_1'' telle que

$$\|\mathbf{z} - \nabla p_\mathbf{z}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_1'' \|\mathbf{z} - \nabla p_\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)}.$$

En utilisant les inégalités ci-dessus et la définition de $\mathbf{w_z}$, nous obtenons

$$\|\mathbf{y_z}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2'' \, \|\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)},$$

avec $C_2'' = 1 + C_0'' + (1 + C_0'')C_1'' \max_{i=1,\ldots,p} (\|\nabla q_i^N\|_{H^1(\Omega)})|\Gamma|$. Enfin la régularité de Γ et la définition de $\mathbf{g}$ impliquent qu'il existe des constantes C_3'' et C_4'' telles que

$$\forall \mathbf{z} \in H^1(\Omega)^3 \ , \ \|\mathbf{v_z}\|_{H^4(\Omega)} \leq C_4'' \|\boldsymbol{\phi}_\mathbf{z}\|_{H^2(\Omega)} \leq C_4'' C_3'' \|\mathbf{y_z}\|_{H^1(\Omega)}.$$

De là (6.3) suit avec $C''' = \sqrt{2} C_4'' C_3'' C_2''$.
$\triangle$

6.2 Une équation de transport

Pour transformer l'équation (2.22) en une équation plus adéquate, nous remplacerons $\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}$ par $\mathbf{z}$ et $\boldsymbol{\omega}$ par $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ où $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot\ u}$. Mais exprimer $\sum_{k=1}^{3} \nabla u_k \times \nabla \Delta u_k$, sous la forme d'une application bilinéaire de $\mathbf{z}$ et $\mathbf{u}$, n'est pas simple et à cette fin nous avons besoin du résultat préliminaire suivant.

Lemme 6.4 *Posons* $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot\ u}$ *et supposons* div $\mathbf{u} = 0$. *Formellement, nous avons*

$$\sum_{k=1}^{3} \nabla u_k \times \nabla \Delta u_k = -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \times \mathbf{rot}(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x_k}) + \Delta\boldsymbol{\omega}.\nabla\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}.\nabla\Delta\mathbf{u} + \Delta\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{6.7}$$

Démonstration. Nous pouvons vérifier que, formellement, pour tout $\mathbf{u}$ et tout $\mathbf{v}$, avec $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ et $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$,

$$\sum_{k=1}^{3}[(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k})_i - (\nabla u_k \times \nabla v_k)_i] = \sum_{k=1}^{3}(\mathbf{rot\ u})_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{3}(\mathbf{rot\ v})_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Mais si $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, $\Delta\mathbf{u} = -\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}$. En prenant $\mathbf{v} = \Delta\mathbf{u} = -\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}$, nous avons

$$\sum_{k=1}^{3}[(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \times \mathbf{rot}(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x_k}))_i + (\nabla u_k \times \nabla\Delta u_k)_i] = -\sum_{k=1}^{3} \omega_k \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} + (\Delta\boldsymbol{\omega}.\nabla\mathbf{u})_i,$$

et le résultat suit du fait que

$$(\Delta\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega})_i = (\boldsymbol{\omega}.\nabla\Delta\mathbf{u})_i - \sum_{k=1}^{3} \omega_k \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i}.$$

△

D'une part, on rappelle l'identité

$$\mathbf{u}.\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}.\nabla\mathbf{u} = \nabla(\mathbf{u}.\mathbf{v}) - \mathbf{u} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v} + \mathbf{rot}\,\mathbf{u} \times \mathbf{v},$$

et dans cette identité, on remplace $\mathbf{u}$ par $\Delta\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ par $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{u}$. En considérant de nouveau que $\Delta\mathbf{u} = -\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}$, nous déduisons

$$\Delta\mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}.\nabla\Delta\mathbf{u} = -\nabla(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}.\mathbf{rot}\,\mathbf{u}) - \frac{1}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{rot}\,\mathbf{u}. \tag{6.8}$$

D'autre part, nous pouvons écrire

$$\Delta\boldsymbol{\omega}.\nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}).\nabla\mathbf{u} + \frac{1}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}. \tag{6.9}$$

En utilisant (6.7), (6.8) et (6.9) dans l'équation de transport (2.22), nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{u}.\nabla(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) - \frac{3\alpha_1 + 2\alpha_2}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}).\nabla\mathbf{u}&\\ +(\alpha_1 + \alpha_2)\nabla(\mathbf{rot\ }\boldsymbol{\omega}.\mathbf{rot\ u}) - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{rot}\,\mathbf{u}&\\ +2(\alpha_1 + \alpha_2)\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \times \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega})&\\ = \mathbf{rot\ f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot\ u} - 2\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot\ u}.\nabla\mathbf{u}.&\end{aligned} \tag{6.10}$$

Puisque nous savons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.17), (2.4) existe, la précédente équation nous conduit à résoudre l'équation de transport suivante, obtenue en remplaçant $\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}$ par $\mathbf{z}$ et $\boldsymbol{\omega}$ par $\mathbf{g}(\mathbf{z})$:

Pour $\mathbf{u}$ donné dans $L^\infty(0,T;V_2)$, $\mathbf{u}_0$ donné dans $H^4(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ donné tel que $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartienne à $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$, chercher $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ solution de:

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{z} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{z} - \frac{3\alpha_1 + 2\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{z}.\nabla\mathbf{u} + (\alpha_1+\alpha_2)[\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})$$
$$-\frac{1}{\alpha_1}\mathbf{z}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + 2\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}))]$$
$$= \mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u} - 2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}, \tag{6.11}$$
$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{rot}(\mathbf{u}_0 - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_0). \tag{6.12}$$

Remarque 6.5 *Nous avons exprimé cette équation en fonction de $\mathbf{z}$ et $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ afin de demander le moins de régularité possible à $\mathbf{u}$. Par exemple, considérant que*

$$\nabla(\Delta\mathbf{u}.\boldsymbol{\omega}) = -\nabla(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}.\mathbf{rot}\,\mathbf{u}),$$

nous l'avons écrit sous la forme $-\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})$ plutôt que $\nabla(\Delta\mathbf{u}.\mathbf{g}(\mathbf{z}))$ car si $\mathbf{z}$ appartient à $H^1(\Omega)^3$ et $\mathbf{u}$ à $H^3(\Omega)^3$, alors $-\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}).\mathbf{rot}\ \mathbf{u})$ appartient à $H^1(\Omega)^3$, tandis que $\nabla(\Delta\mathbf{u}.\mathbf{g}(\mathbf{z}))$ appartient seulement à $L^2(\Omega)^3$.

6.3 Existence de solution dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ de l'équation de transport

Pour construire une solution de (6.11), (6.12), discrétisons ce problème par la méthode de Galerkin avec une base similaire à celle introduite par R. Temam dans [34]. Comme l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, le problème spectral

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3\ ,\ (\mathbf{w},\mathbf{v}) + (\nabla\mathbf{w},\nabla\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{w},\mathbf{v}) \tag{6.13}$$

a une suite dénombrable de valeurs propres positives distinctes:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k \to \infty$$

et un ensemble correspondant de fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}_{j\geq 1}$ qui forme une base orthonormale de $L^2(\Omega)^3$ et une base orthogonale de $H^1(\Omega)^3$. En fait, c'est un problème de Neumann homogène et $\mathbf{w}_j$ appartient à $H^2(\Omega)^3$, à condition que Γ soit de classe $C^{1,1}$.

Pour $m \geq 1$, nous notons X_m l'espace engendré par $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^m$ et P_m l'opérateur de projection orthogonale sur X_m pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)^3$. Alors le problème (6.11), (6.12) est discrétisé par:

Chercher

$$\mathbf{z}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{j,m}(t)\mathbf{w}_j,$$

solution, pour $1 \leq j \leq m$ de

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{z}'_m(t), \mathbf{w}_j) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\mathbf{z}_m(t), \mathbf{w}_j) + b(\mathbf{u}(t); \mathbf{z}_m(t), \mathbf{w}_j) \\
&-\frac{3\alpha_1 + 2\alpha_2}{\alpha_1} b(\mathbf{z}_m(t); \mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j) + (\alpha_1 + \alpha_2)\{(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)), \mathbf{w}_j) \\
&-\frac{1}{\alpha_1}(\mathbf{z}_m(t) \times \mathbf{rot}\ \mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j) + 2\sum_{k=1}^{3}[b(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)); \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_k}, \mathbf{w}_j) \\
&-b(\frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_k}; \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)), \mathbf{w}_j) - (\frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_k} \times \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)), \mathbf{w}_j)]\} \\
&= (\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t) + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t) - 2\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t).\nabla\mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j), \qquad (6.14)
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{z}_m(0) = P_m(\mathbf{z}(0)). \qquad (6.15)
$$

Le problème (6.14), (6.15) est un système de m équations différentielles linéaires d'ordre un, avec une condition initiale au temps $t = 0$. Le facteur de $c'_{j,m}(t)$ est une matrice constante non singulière et les autres facteurs ont des coefficients variables mais continus. On en déduit (cf. par exemple [10]) que ce système a une solution $\mathbf{z}_m(t)$, unique et continue sur tout l'intervalle $[0, T]$.

Lemme 6.6 *Supposons que* $\mathbf{u}$ *appartienne à* $L^\infty(0, T; V_2)$ *et que* $\mathbf{f}$ *soit tel que* $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ *appartienne à* $L^1(0, T; H^1(\Omega)^3)$*. Alors la solution* $\mathbf{z}_m(t)$ *de (6.14), (6.15) est bornée comme suit:*

$$
\forall t \in [0, T],\ \|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq e^{K_T t}(\|\mathbf{z}_m(0)\|_{H^1(\Omega)} + C_T), \qquad (6.16)
$$

où K_T *et* C_T *sont deux constantes qui dépendent de* T*, mais non de* m*.*

Démonstration. Multipliant les deux membres de (6.14) par $\lambda_j c_{j,m}(t)$, appliquant (6.13) et sommant par rapport à j, on obtient, après avoir supprimé la variable t pour simplifier les notations:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)}) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\|\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&+(\nabla(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m), \nabla\mathbf{z}_m) - \frac{3\alpha_1 + 2\alpha_2}{\alpha_1}[(\nabla(\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u}), \nabla\mathbf{z}_m) + (\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u}, \mathbf{z}_m)] \\
&+(\alpha_1 + \alpha_2)\{(\nabla(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})), \nabla\mathbf{z}_m) + (\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}), \mathbf{z}_m) \\
&-\frac{1}{\alpha_1}(\nabla(\mathbf{z}_m \times \mathbf{rot}\,\mathbf{u}), \nabla\mathbf{z}_m) + 2\sum_{k=1}^{3}[(\nabla(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}), \nabla\mathbf{z}_m) \\
&+(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}, \mathbf{z}_m) - (\nabla(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)), \nabla\mathbf{z}_m) - (\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m), \mathbf{z}_m) \\
&-(\nabla(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \times \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)), \nabla\mathbf{z}_m) - (\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \times \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m), \mathbf{z}_m)]\} \\
&= (\mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u} - 2\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}, \mathbf{z}_m)_{H^1(\Omega)}. \qquad (6.17)
\end{aligned}
$$

Tous ces termes sont bien définis, par suite de la régularité de $\mathbf{w}_j$, $\mathbf{u}$ et $\mathbf{g}$. Le seul terme qui pose un problème dans (6.17) est $(\nabla(\mathbf{u}(t).\nabla\mathbf{z}_m(t)), \nabla\mathbf{z}_m(t))$, car il fait intervenir la dérivée seconde de $\mathbf{z}_m$ qui ne peut pas être contrôlée par les termes positifs du membre de gauche. Développons ce terme:

$$(\nabla(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m),\nabla\mathbf{z}_m) = (\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial z_{m,i}}{\partial x_l},\frac{\partial z_{m,i}}{\partial x_k}) + (u_l\frac{\partial^2 z_{m,i}}{\partial x_k\partial x_l},\frac{\partial z_{m,i}}{\partial x_k}).$$

Mais

$$(u_l\frac{\partial^2 z_{m,i}}{\partial x_k\partial x_l},\frac{\partial z_{m,i}}{\partial x_k}) = (u_l,\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_l}(\frac{\partial z_{m,i}}{\partial x_k}.\frac{\partial z_{m,i}}{\partial x_k})).$$

Alors la formule de Green donne

$$(u_l\frac{\partial^2 z_{m,i}}{\partial x_k\partial x_l},\frac{\partial z_{m,i}}{\partial x_k}) = -(\operatorname{div}\mathbf{u},\frac{1}{2}|\nabla\mathbf{z}_m|^2) = 0,$$

car $\mathbf{u}$ appartient à V. Donc

$$(\nabla(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m),\nabla\mathbf{z}_m) = \sum_{k=1}^{3} b(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k};\mathbf{z}_m,\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_k}).$$

Utilisant le Lemme 3.5, Cauchy-Schwarz et les normes définies par (2.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}
|(\nabla(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m),\nabla\mathbf{z}_m)| &\leq |\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}\sum_{k=1}^{3}\|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\nabla\,\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{z}_m|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

De là (2.15) donne

$$|(\nabla(\mathbf{u}(t).\nabla\mathbf{z}_m(t)),\nabla\mathbf{z}_m(t))| \leq C_1\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.18}$$

Examinons les autres termes du membre de gauche. Tout d'abord nous avons les termes

$$|(\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u},\mathbf{z}_m)|,\ |(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}),\mathbf{z}_m)|,\ |\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k},\mathbf{z}_m)|,$$

$$|\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)| \text{ et } |\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)|.$$

Montrons qu'ils sont majorés par des termes de la forme $C\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$, où C dépend de C_1, C_2 et C'. On peut remarquer que $(\mathbf{z}_m.\nabla\,\mathbf{u},\mathbf{z}_m) = b(\mathbf{z}_m;\mathbf{u},\mathbf{z}_m)$. Alors le Lemme 3.5 donne

$$|(\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u},\mathbf{z}_m)| \leq \|\nabla\,\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)},$$

et de (2.15), nous déduisons

$$|(\mathbf{z}_m(t).\nabla\mathbf{u}(t),\mathbf{z}_m(t))| \leq C_1\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.19}$$

Ensuite

$$(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}),\mathbf{z}_m) = (\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}, z_{m,i}) + (\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}, z_{m,i}).$$

Alors les inégalités de Hölder et de Cauchy-Schwarz impliquent

$$\begin{aligned}|(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}),\mathbf{z}_m)| &\leq (\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}(\mathbf{rot}\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_i})_j^2\,d\mathbf{x})^{1/2}(\int_\Omega \sum_{j=1}^{3}(\mathbf{rot}\,\mathbf{u})_j^2 \sum_{i=1}^{3} z_{m,i}^2\,d\mathbf{x})^{1/2} \\ &+(\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} z_{m,i}^2\,d\mathbf{x})^{1/2}(\int_\Omega \sum_{j=1}^{3}(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_j^2 \sum_{i,j=1}^{3}(\mathbf{rot}\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i})_j^2\,d\mathbf{x})^{1/2} \\ &\leq 2\|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}(\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)|_{H^2(\Omega)} + \|\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{L^4(\Omega)}\|\partial^2\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}).\end{aligned}$$

De là, (2.15), (2.16) et (6.2) donnent

$$|(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)).\mathbf{rot}\ \mathbf{u}(t)),\mathbf{z}_m(t))| \leq 2(C_1 + C_2^{\frac{3}{2}})C'\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{6.20}$$

Pour le terme suivant, on utilise le Lemme 3.5, (2.16) et Cauchy-Schwarz, ce qui donne

$$\begin{aligned}|\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k},\mathbf{z}_m)| &\leq \|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}\sum_{k=1}^{3}\|\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k})\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C_2^{3/2}\|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{H^1(\Omega)}\|\partial^2\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Alors, de (6.2) et (2.16), on déduit

$$|\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}(t),\mathbf{z}_m(t))| \leq C_2^{3/2}C'\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{6.21}$$

De même

$$|\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)| \leq \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}.$$

De là,

$$|\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}(t).\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)(t),\mathbf{z}_m(t))| \leq C_1C'\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{6.22}$$

Enfin le Lemme 3.4 et Cauchy-Schwarz impliquent

$$\begin{aligned}|\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)| &\leq \|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}\sum_{k=1}^{3}\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{rot}\,(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{rot}(\nabla(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)))\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Alors le Lemme 3.3, (2.15) et (6.2) permettent d'écrire

$$|\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}(t)\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)(t),\mathbf{z}_m(t))| \leq \sqrt{2}\,C_1C'\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{6.23}$$

Nous allons montrer que les termes restants du membre de gauche de (6.17) sont majorés par des expressions du même type que dans (6.18), c'est-à-dire du type

$$C\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)},$$

où C dépend de C_1, C_2 et C''. Considérons le développement

$$(\nabla(\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u}),\nabla\mathbf{z}_m) = b(\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_k};\mathbf{u},\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_k}) + b(\mathbf{z}_m;\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k},\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_k}).$$

Alors le Lemme 3.5, (2.16) et Cauchy-Schwarz donnent

$$|(\nabla(\mathbf{z}_m.\nabla\,\mathbf{u}),\nabla\,\mathbf{z}_m)| \le \|\nabla\,\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{z}_m|^2_{H^1(\Omega)} + C_2^{3/2}|\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)}\|\partial^2\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)},$$

puis (2.15) donnent

$$|(\nabla(\mathbf{z}_m(t).\nabla\,\mathbf{u}(t)),\nabla\,\mathbf{z}_m(t))| \le (C_1 + C_2^{3/2})\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}. \quad (6.24)$$

Considérons le développement

$$\begin{aligned}(\nabla(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})),\nabla\,\mathbf{z}_m) &= (\frac{\partial^2\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k\partial x_i}.\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \frac{\partial\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}.\frac{\partial\mathbf{rot}\,\mathbf{u}}{\partial x_i},\frac{\partial z_{m,i}}{\partial x_k})\\ &+(\frac{\partial\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_i}.\frac{\partial\mathbf{rot}\,\mathbf{u}}{\partial x_k} + \mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\frac{\partial^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}}{\partial x_i\partial x_k},\frac{\partial z_{m,i}}{\partial x_k}).\end{aligned}$$

Par Hölder, (2.16) et Cauchy-Schwarz, nous en déduisons

$$\begin{aligned}&|(\nabla(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})),\nabla\,\mathbf{z}_m)| \le |\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}(\|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{rot}(\partial^2\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))\|_{L^2(\Omega)}\\ &+2C_2^{3/2}\|\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))\|_{H^1(\Omega)}\|\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{u})\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{rot}(\partial^2\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

Mais, par suite du Lemme 3.3, pour tout $\mathbf{v}$ dans $H^3(\Omega)^3$,

$$\|\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{v})\|_{H^1(\Omega)} \le \sqrt{2}\,\|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)}.$$

Alors, de cette inégalité, de (2.15), de (6.3) et du Lemme 3.3, nous déduisons

$$\begin{aligned}&|(\nabla(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t))),\nabla\,\mathbf{z}_m(t))|\\ &\le 4\,C''(C_1 + C_2^{3/2})\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}. \quad (6.25)\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\sum_{k=1}^{3}(\nabla(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}),\nabla\mathbf{z}_m) = b(\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x_k\partial x_j};\frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k},\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_j}) + b(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k};\frac{\partial^2\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_j\partial x_k},\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_j}).$$

Puis le Lemme 3.5, (2.16) et Cauchy-Schwarz donnent

$$\begin{aligned}|\sum_{k=1}^{3}(\nabla(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}),\nabla\mathbf{z}_m)| &\le \sum_{k,j=1}^{3}\|\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x_k\partial x_j}\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla(\frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k})\|_{L^4(\Omega)}\|\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)}\\ &+\|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}\|_{L^\infty(\Omega)}|\frac{\partial^2\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_j\partial x_k}|_{H^1(\Omega)}\|\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le |\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}(C_2^{3/2}\|\partial^2\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}\|\partial^2\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)|_{H^3(\Omega)}).\end{aligned}$$

Alors, de (2.15) et (6.3), nous déduisons la majoration suivante

$$|\sum_{k=1}^{3}(\nabla(\frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t))}{\partial x_k}),\nabla \mathbf{z}_m(t))|$$
$$\leq C''(C_1 + C_2^{\frac{3}{2}})\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.26}$$

De manière analogue

$$\sum_{k=1}^{3}(\nabla(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}),\nabla \mathbf{z}_m) = b(\frac{\partial^2 \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k \partial x_j};\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k},\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_j}) + b(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k};\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_k \partial x_j},\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_j}).$$

Alors

$$|\sum_{k=1}^{3}(\nabla(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}),\nabla \mathbf{z}_m)|$$
$$\leq |\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}(C_2^{3/2}\|\partial^2 \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{H^1(\Omega)}\|\partial^2 \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{u}|_{H^3(\Omega)}).$$

D'où la majoration

$$|\sum_{k=1}^{3}(\nabla(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}(t).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}(t)),\nabla \mathbf{z}_m(t))|$$
$$\leq C''(C_1 + C_2^{3/2})\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.27}$$

Puisque $(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{z}_m \times \mathbf{rot}\,\mathbf{u}, \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{z}_m) = 0$, on a

$$(\nabla(\mathbf{z}_m \times \mathbf{rot}\,\mathbf{u}),\nabla \mathbf{z}_m) = (\mathbf{z}_m \times \mathbf{rot}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}),\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_k}).$$

Du Lemme 3.4, nous déduisons

$$|(\nabla(\mathbf{z}_m \times \mathbf{rot}\,\mathbf{u}),\nabla \mathbf{z}_m) \leq \|\mathbf{z}_m\|_{L^4(\Omega)}\sum_{k=1}^{3}\|\mathbf{rot}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k})\|_{L^4(\Omega)}\|\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors (2.16), Cauchy-Schwarz et le Lemme 3.3 donnent

$$|(\nabla(\mathbf{z}_m(t) \times \mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)),\nabla \mathbf{z}_m(t))| \leq \sqrt{2}\,C_2^{3/2}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.28}$$

Enfin, considérons le développement

$$(\nabla(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \times \frac{\partial \mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}),\nabla \mathbf{z}_m) = (\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_k \partial x_j} \times \mathbf{rot}(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}),\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_j})$$
$$+(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \times \mathbf{rot}(\frac{\partial^2 \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k \partial x_j}),\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_j}).$$

De manière analogue à la majoration précédente, le Lemme 3.4 donne

$$|(\nabla(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \times \frac{\partial \mathbf{rot}\, \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}), \nabla \mathbf{z}_m)| \leq \sqrt{2} \| \frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_j} \|_{L^2(\Omega)} \| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_k \partial x_j} \|_{L^4(\Omega)} \| \mathbf{rot}(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}) \|_{L^4(\Omega)}$$
$$+\sqrt{2} \| \frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_j} \|_{L^2(\Omega)} \| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \|_{L^\infty(\Omega)} \| \mathbf{rot}(\frac{\partial^2 \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k \partial x_j}) \|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors (2.16), (2.15), Cauchy-Schwarz, le Lemme 3.3 et (6.3) nous conduisent à la majoration

$$\begin{aligned} &| \sum_{k=1}^{3} (\nabla(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}(t) \times \frac{\partial \mathbf{rot}\, \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}(t)), \nabla \mathbf{z}_m(t))| \\ &\leq \sqrt{2}\, C''(C_1 + C_2^{3/2}) \| \mathbf{u}(t) \|_{H^3(\Omega)} |\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)} \| \mathbf{z}_m(t) \|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Il reste à majorer le membre de droite de (6.17). D'une part

$$(\nabla(\mathbf{rot}\, \mathbf{u}.\nabla \mathbf{u}), \nabla \mathbf{z}_m) = b(\frac{\partial \mathbf{rot}\, \mathbf{u}}{\partial x_j}; \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_j}) + b(\mathbf{rot}\, \mathbf{u}; \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_j}).$$

D'où, les Lemmes 3.5 et 3.3, Cauchy-Schwarz et (2.15) donnent

$$|(\nabla(\mathbf{rot}\, \mathbf{u}(t).\nabla \mathbf{u}(t)), \nabla \mathbf{z}_m(t))| \leq 2\sqrt{2} C_1 |\mathbf{u}(t)|_{H^2(\Omega)} \| \mathbf{u}(t) \|_{H^3(\Omega)} |\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}.$$

D'autre part, par les mêmes procédés, on a

$$|(\mathbf{rot}\, \mathbf{u}(t).\nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{z}_m(t))| \leq \sqrt{2} C_1 |\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)} \| \mathbf{u}(t) \|_{H^3(\Omega)} \| \mathbf{z}_m(t) \|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc nous avons la majoration

$$|(\mathbf{rot}\, \mathbf{u}(t).\nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{z}_m(t))_{H^1(\Omega)}| \leq 2\sqrt{2}\, C_1 \| \mathbf{u}(t) \|_{H^2(\Omega)} \| \mathbf{u}(t) \|_{H^3(\Omega)} \| \mathbf{z}_m(t) \|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.30}$$

Les majorations des termes restants sont immédiates. Rassemblant alors les majorations (6.18)-(6.30) et les substituant dans (6.17), nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \mathbf{z}_m(t) \|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{\alpha_1} \| \mathbf{z}_m(t) \|_{H^1(\Omega)}^2 \leq D_1 \| \mathbf{u}(t) \|_{H^3(\Omega)} \| \mathbf{z}_m(t) \|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$+D_2 \| \mathbf{u}(t) \|_{H^3(\Omega)} |\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)} \| \mathbf{z}_m(t) \|_{H^1(\Omega)} + \| \mathbf{z}_m(t) \|_{H^1(\Omega)} (\| \mathbf{rot}\, \mathbf{f}(t) \|_{H^1(\Omega)}$$
$$+ \frac{\nu}{\alpha_1} \sqrt{2} \| \mathbf{u}(t) \|_{H^2(\Omega)} + \frac{4\sqrt{2}}{\alpha_1} |\alpha_1 + \alpha_2| C_1 \| \mathbf{u}(t) \|_{H^2(\Omega)} \| \mathbf{u}(t) \|_{H^3(\Omega)}),$$

avec

$$D_1 = (1 + 2|\alpha_1 + \alpha_2|(\frac{1}{\alpha_1} + (2 + \sqrt{2})C'))C_1 + 4|\alpha_1 + \alpha_2| C' C_2^{3/2}$$

et

$$D_2 = 2C_1 + C_2^{3/2} + |\alpha_1 + \alpha_2| [\frac{2C_1 + (2 + \sqrt{2}) C_2^{3/2}}{\alpha_1} + 2(4 + \sqrt{2})(C_1 + C_2^{3/2}) C''].$$

Utilisant la majoration

$$|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2}(|\mathbf{z}_m(t)|^2_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)})$$

et simplifiant par $\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}$, nous déduisons

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq K_1\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{H^1(\Omega)}$$
$$+\frac{\nu}{\alpha_1}\sqrt{2}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)} + \frac{4\sqrt{2}}{\alpha_1}|\alpha_1+\alpha_2|C_1\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)},$$

avec $K_1 = \max(D_1, \frac{D_2}{2}) + \frac{D_2}{2}$.

D'où (6.16) suit avec

$$K_T = K_1\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)}$$

et

$$C_T = \|\mathbf{rot}\ \mathbf{f}\|_{L^1(0,T;H^1(\Omega)^3} + T\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)}(\frac{\sqrt{2}\nu}{\alpha_1} + 4\sqrt{2}C_1\frac{|\alpha_1+\alpha_2|}{\alpha_1}\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)}).$$

△

Il découle de (6.16) que la suite $\{\mathbf{z}_m\}$ est uniformément bornée par rapport à m dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$. De là, il existe une fonction $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et une sous-suite de $\{\mathbf{z}_m\}$, encore notée $\{\mathbf{z}_m\}$, telles que

$$\lim_{m\to\infty}\mathbf{z}_m = \mathbf{z} \quad \text{faible} * \ \text{dans } L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3).$$

Par un argument similaire à celui utilisé dans le précédent paragraphe, mais plus simple puisque le problème est linéaire, nous pouvons passer à la limite dans (6.14), (6.15) et montrer que $\mathbf{z}$ satisfait (6.11), (6.12). Nous avons donc prouvé le théorème suivant.

Théorème 6.7 *Supposons que Ω soit un ouvert de $I\!R^3$, borné et simplement connexe, avec une frontière $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{p}\Gamma_i$ (Γ_i connexe) de classe $C^{3,1}$. Si $\mathbf{u}$ est donné dans $L^\infty(0,T;V_2)$, $\mathbf{u}_0$ dans $H^4(\Omega)^3\cap V$ et $\mathbf{f}$ tel que $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartienne à $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$, alors le problème (6.11), (6.12) a au moins une solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$.*

Remarque 6.8 *Comme on le verra dans le paragraphe suivant, les arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 6.7 peuvent être généralisés à un quelconque $m \geq 1$. Si Γ est de classe $C^{m+2,1}$, si $\mathbf{u}$ est donné dans $L^\infty(0,T;V_2\bigcap H^{m+2}(\Omega)^3)$, $\mathbf{u}_0$ dans $H^{m+3}(\Omega)^3\cap V$ et $\mathbf{f}$ tel que $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartienne à $L^1(0,T;H^m(\Omega)^3)$, alors le problème (6.11), (6.12) a au moins une solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^m(\Omega)^3)$.*

6.4 Unicité de la solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ de l'équation de transport

Soient $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_2$ deux solutions de (6.11), (6.12) et posons $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2$. Alors $\boldsymbol{\zeta}$ satisfait

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + \frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\zeta} - \frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{\zeta}.\nabla\mathbf{u} \\
&+(\alpha_1+\alpha_2)\{\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}) - \frac{1}{\alpha_1}(\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{u}) \\
&+2\sum_{k=1}^{3}[\frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial \mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k}]\} = 0, \qquad (6.31)
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\zeta}(0) = \mathbf{0}. \qquad (6.32)$$

Prouver l'unicité dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ de la solution du problème (6.31), (6.32) n'est pas évident car, quand $\boldsymbol{\zeta}$ est dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$, le produit scalaire de (6.31) avec $\boldsymbol{\zeta}$ n'est pas défini. Au lieu de cela, procédons par transposition (*cf.* [23]). Rappelons que si $\boldsymbol{\zeta}$ appartient à $H^1(\Omega)^3$, puisque $\mathbf{u}$ appartient à V, nous avons

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 \ , \ \int_\Omega (\mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\zeta}).\mathbf{v}\,d\mathbf{x} = -\int_\Omega (\mathbf{u}.\nabla\mathbf{v}).\boldsymbol{\zeta}\,d\mathbf{x}\ ,$$

et le membre de droite est bien défini pour tout $\boldsymbol{\zeta}$ dans $L^2(\Omega)^3$. D'où le problème (6.31), (6.32) a la formulation variationnelle équivalente:

chercher $\boldsymbol{\zeta}$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ solution de

$$\forall \boldsymbol{\phi} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)^3) \text{ avec } \boldsymbol{\phi}' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^3) \text{ et } \boldsymbol{\phi}(T) = \mathbf{0}$$

$$\int_0^T [(\boldsymbol{\zeta}(t), \boldsymbol{\phi}'(t) - \frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\phi}(t) + \mathbf{u}(t).\nabla\boldsymbol{\phi}(t)) + (\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})(t), \boldsymbol{\phi}(t))]\,dt = 0, \qquad (6.33)$$

où

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) = &\frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{\zeta}.\nabla\mathbf{u} - (\alpha_1+\alpha_2)\{\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}) - \frac{1}{\alpha_1}(\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{u}) \\
&+2\sum_{k=1}^{3}[\frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial \mathbf{rot}\ \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k}]\}, \qquad (6.34)
\end{aligned}$$

sans terme aux temps $t = 0$ et $t = T$ car $\boldsymbol{\zeta}(0) = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\phi}(T) = \mathbf{0}$.

Une variante du Théorème 6.7 peut être appliquée pour prouver, pour tout $\boldsymbol{\mu}$ dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)^3)$, l'existence et l'unicité (celle ci est évidente, voir plus loin la Remarque 6.10) de $\boldsymbol{\phi}$ dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)^3)$ avec $\boldsymbol{\phi}'$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ et $\boldsymbol{\phi}(T) = \mathbf{0}$ tel que

$$\boldsymbol{\phi}'(t) - \frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\phi}(t) + \mathbf{u}(t).\nabla\boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\mu}(t). \qquad (6.35)$$

Nous posons

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}). \qquad (6.36)$$

Lemme 6.9 *Soit* $\mathbf{F}$ *défini par (6.36). Nous avons*

$$\forall \boldsymbol{\mu} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)^3),\ \ \|\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq 2T\|\boldsymbol{\mu}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}.$$

Démonstration. Le produit scalaire de (6.35) par $\boldsymbol{\phi}(t)$ donne

$$(\boldsymbol{\phi}'(t),\boldsymbol{\phi}(t)) - \frac{\nu}{\alpha_1}\|\boldsymbol{\phi}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = (\boldsymbol{\mu}(t),\boldsymbol{\phi}(t)).$$

En intégrant sur $[t,T]$ avec $0 \leq t \leq T$, nous obtenons

$$-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\phi}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\nu}{\alpha_1}\int_t^T \|\boldsymbol{\phi}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds = \int_t^T (\boldsymbol{\mu}(s),\boldsymbol{\phi}(s))\,ds,$$

donc

$$\|\boldsymbol{\phi}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2\|\boldsymbol{\mu}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}.$$

D'où

$$\|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq 2T\|\boldsymbol{\mu}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}. \tag{6.37}$$

△

Remarque 6.10 *La majoration (6.37) prouve l'unicité de la solution du problème (6.35).*

Lemme 6.11 *Soient* $\boldsymbol{\zeta}$ *un élément de* $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$, $\mathbf{u}$ *donné dans* $L^\infty(0,T;V_2)$ *et* $\mathbf{h}$ *défini par (6.34). Alors* $\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})$ *appartient à* $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ *et*

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq D\,C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;V_2)}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}, \tag{6.38}$$

où

$$D = |\alpha_1+\alpha_2|[(\frac{2+\sqrt{2}}{\alpha_1} + 2(2+\sqrt{2})C')C_1 + 4\,C'C_2^{\frac{3}{2}}] + C_1. \tag{6.39}$$

Démonstration. Par le même type d'argument que dans le paragraphe précédent, utilisant (2.15), (2.16) et (6.2), nous obtenons

$$\|\boldsymbol{\zeta}.\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|\mathbf{u}\|_{H^3(\Omega)}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\|\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \leq 2(C_1 + C_2^{\frac{3}{2}})C'\|\mathbf{u}\|_{H^3(\Omega)}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\|\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2^{\frac{3}{2}}C'\|\mathbf{u}\|_{H^3(\Omega)}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\|\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1C'\|\mathbf{u}\|_{H^3(\Omega)}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Enfin, du Lemme 3.4, il découle

$$\|\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2}\,C_1\|\mathbf{u}\|_{H^3(\Omega)}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\| \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \times \frac{\partial \mathbf{rot}\, \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k} \|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2}\, C_1 C' \|\mathbf{u}\|_{H^3(\Omega)} \|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Le Lemme 6.11 se déduit de ces inégalités.
△

Le lemme suivant prouve l'unicité dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ de la solution du problème (6.11), (6.12).

Lemme 6.12 *Soient* Γ *de classe* $C^{2,1}$ *et* $\mathbf{u}$ *donné dans* $L^\infty(0,T;V_2)$. *Alors l'unique solution* $\boldsymbol{\zeta}$ *de (6.31), (6.32) dans* $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ *est* $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$.

Démonstration. Par densité, il existe une suite $\{\boldsymbol{\mu}_n\}$ avec $\boldsymbol{\mu}_n \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)^3$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{\mu}_n - \boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} = 0. \tag{6.40}$$

Nous posons

$$\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_n), \tag{6.41}$$

où $\mathbf{F}$ est défini par (6.36). En prenant $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}_n$ dans (6.33), nous obtenons

$$\int_0^T [(\boldsymbol{\zeta}(t), \boldsymbol{\phi}_n'(t) - \frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\phi}_n(t) + \mathbf{u}(t).\nabla\boldsymbol{\phi}_n(t)) + (\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})(t), \boldsymbol{\phi}_n(t))]\, dt = 0.$$

Avec (6.35) et (6.41), cela devient

$$\int_0^T [(\boldsymbol{\zeta}(t), \boldsymbol{\mu}_n(t)) + (\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})(t), \mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_n)(t))]\, dt = 0. \tag{6.42}$$

Etant donné (6.40) et le Lemme 6.9, $\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_n)$ est borné dans l'espace réflexif $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$. D'où, il existe une fonction $\boldsymbol{\psi}$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ et une sous-suite de $\{\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_n)\}$, encore notée $\{\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_n)\}$, telles que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_n) = \boldsymbol{\psi} \qquad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)^3).$$

De plus, par semi-continuité inférieure de la norme $\| \,.\, \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}$ pour la topologie faible,

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq \liminf \|\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_n)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}.$$

Donc, en raison de (6.40) et du Lemme 6.9,

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq 2T\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}. \tag{6.43}$$

Le passage à la limite dans (6.42) donne

$$\int_0^T [\|\boldsymbol{\zeta}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})(t), \boldsymbol{\psi}(t))]\, dt = 0.$$

Alors de (6.43) et du Lemme 6.11, nous déduisons que

$$\|\boldsymbol{\zeta}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}(1 - 2\,T\,D\,C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;V_2)}) \leq 0. \tag{6.44}$$

Nous posons

$$T^* = \frac{1}{4\,D\,C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;V_2)}},$$

où D dépend de $\alpha_1,\ \alpha_2,\ C_1,\ C_2$ et C' mais non de T (cf. (6.39)). Si $T^* \geq T$, (6.44) donne

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{0} \ \text{ pour tout } t \text{ dans } [0,T].$$

Si $T^* < T$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(p-1)T^* < T \leq pT^*$. Remplaçons successivement $[0,T]$ par $[(k-1)T^*, kT^*]$ pour $k = 1,\ldots,\ p-1$ dans (6.33) et utilisons (6.35), (6.36) , les Lemmes 6.9 et 6.11; nous obtenons successivement pour $k = 1,\ldots,\ p-1$ des relations analogues à (6.44):

$$\|\boldsymbol{\zeta}\|^2_{L^2((k-1)T^*,kT^*;L^2(\Omega)^3)}[1 - 2\,T^*\,DC(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty((k-1)T^*,kT^*;V_2)}] \leq 0.$$

Comme $\|\mathbf{u}\|_{L^\infty((k-1)T^*,kT^*;V_2)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;V_2)}$, nous avons

$$[1 - 2\,T^*\,DC(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty((k-1)T^*,kT^*;V_2)}] \geq \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{0} \ \text{ pour tout } t \text{ dans } [(k-1)T^*, kT^*], \text{ pour } k = 1,\ldots,p-1, \text{ soit}$$

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{0} \ \text{ pour tout } t \text{ dans } [0,(p-1)T^*].$$

Finalement, le même argument sur l'intervalle restant $[(p-1)T^*, T]$ donne

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{0} \ \text{ pour tout } t \text{ dans } [0,T].$$

$\triangle$

6.5 Conclusion

Le problème (6.11), (6.12) a une solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ (cf. Paragraphe 6.3) et une solution $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ (cf. Paragraphe 6.2). Dans le Paragraphe 6.4, nous prouvons que ce problème n'a qu'une solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$. Donc $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ appartient à $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et, étant donné la Remarque 2.3, cela implique que $\mathbf{u}$ est dans $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$. Nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème 6.13 *Supposons que Ω soit un ouvert de $\mathbb{R}^3$, borné et simplement connexe, avec une frontière $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{p} \Gamma_i$ (Γ_i connexe). Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1)-(2.5) appartienne à $L^\infty(0,T;V_2)$. Si Γ est de classe $C^{3,1}$ et si les données ont la régularité:*

$$\mathbf{u}_0 \in H^4(\Omega)^3 \cap V\ ,\ \ \mathbf{f} \in L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)\ ,\ \ \mathbf{rot}\,\mathbf{f} \in L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)\ , \tag{6.45}$$

alors $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$.

Suivant la Remarque 6.8, l'énoncé du Théorème 6.13 peut être généralisé par induction à tout $m \geq 1$ pour donner le résultat suivant. Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1)-(2.5) appartienne à $L^\infty(0,T;V_2)$. Si Γ est de classe $C^{m+2,1}$ et si $\mathbf{u}_0$ est donné dans $H^{m+3}(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ dans $L^1(0,T;H^m(\Omega)^3)$ avec $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ dans $L^1(0,T;H^m(\Omega)^3)$, alors $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T;H^{m+3}(\Omega)^3)$. La démonstration est similaire, il suffit de prendre pour base les fonctions propres du problème

$$\forall \mathbf{v} \in H^m(\Omega)^3\ ,\ ((\mathbf{w}_j,\mathbf{v}))_m = \lambda_j(\mathbf{w}_j,\mathbf{v})\ ,$$

où $((.,.))_m$ représente le produit scalaire de $H^m(\Omega)^3$. Nous montrerons ce résultat dans le paragraphe suivant.

7 Régularité: généralisation et solution classique

Nous commencerons par généraliser le résultat du Théorème 6.13. puis, après quelques lemmes préliminaires concernant la régularité de la pression p et de $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$, nous aborderons le problème de la solution classique.

7.1 Régularité généralisée

Pour étudier la régularité du problème (2.1), il est utile de généraliser les résultats du Lemme 6.3 concernant l'application $\mathbf{g}$ définie par (6.1).

Lemme 7.1 *Soit un entier $m \geq 1$. En plus des hypothèses du Lemme 2.1, supposons que la frontière Γ soit de classe $C^{m+2,1}$. Alors l'application $\mathbf{g}$ définie sur $L^2(\Omega)^3$ par (6.1) est un opérateur continu de $H^m(\Omega)^3$ dans $H^{m+2}(\Omega)^3$ et il existe une constante C_m telle que*

$$\forall \mathbf{z} \in H^m(\Omega)^3,\ \|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C_m\,\|\mathbf{z}\|_{H^m(\Omega)}. \tag{7.1}$$

Démonstration. Soit $\mathbf{z}$ un élément de $H^m(\Omega)^3$. Considérons de nouveau $\mathbf{w_z}$ défini par (6.4). La régularité du problème de Dirichlet et celle du noyau $K_N(\Omega)$ (cf. Paragraphe 6.1) impliquent que $\mathbf{w_z}$ appartient à $H^m(\Omega)^3$ et qu'il existe une constante C'_m telle que

$$\|\mathbf{w_z}\|_{H^m(\Omega)} \leq C'_m\|\mathbf{z}\|_{H^m(\Omega)}.$$

Rappelons (cf. le paragraphe précédent) que $\mathbf{y_z} = P_G(\mathbf{z}) = \mathbf{z} - \mathbf{w_z}$. D'où

$$\|\mathbf{y_z}\|_{H^m(\Omega)} \leq (1 + C'_m)\|\mathbf{z}\|_{H^m(\Omega)}.$$

Alors la régularité des problèmes intervenant dans la définition de $\mathbf{g}$ et celle de Γ impliquent qu'il existe des constantes C''_m et C'''_m telles que

$$\forall \mathbf{z} \in H^m(\Omega)^3,\ \|\mathbf{v_z}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq C'''_m\|\boldsymbol{\phi}_\mathbf{z}\|_{H^{m+1}(\Omega)} \leq C'''_m C''_m\|\mathbf{y_z}\|_{H^m(\Omega)}.$$

Donc $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{rot}\,\mathbf{v_z}$ appartient à $H^{m+2}(\Omega)^3$ et (7.1) est vérifiée avec

$$C_m = \sqrt{2}\,C'''_m C''_m(1 + C'_m).$$

$\triangle$

Par induction, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 7.2 *Soient un entier $m \geq 1$ et Ω un ouvert de R^3, borné et simplement connexe avec une frontière Γ de classe $C^{m+2,1}$. Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1)-(2.5) appartienne à $L^\infty(0,T;V_2)$. Si $\mathbf{u}_0$ est donné dans $H^{m+3}(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ dans $L^1(0,T;H^m(\Omega)^3)$ avec $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ dans $L^1(0,T;H^m(\Omega)^3)$, alors $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T;H^{m+3}(\Omega)^3)$.*

Démonstration. Le paragraphe précédent montre que le théorème est vrai pour $m = 1$. Admettons le résultat du théorème à l'ordre $m-1$ pour $m \geq 2$ et démontrons-le à l'ordre m. Considérons de nouveau l'équation de transport en $\mathbf{z}$ (6.11). Clairement, l'unicité de la solution du problème (6.11), (6.12) dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$, démontrée précédemment, implique l'unicité dans $L^\infty(0,T;H^m(\Omega)^3)$. De plus, rappelons que $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$ est cette unique solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$. Admettons l'existence d'une solution dans $L^\infty(0,T;H^m(\Omega)^3)$ du problème (6.11), (6.12). Alors la solution est $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$. D'où $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$ appartient à $L^\infty(0,T;H^m(\Omega)^3)$ et la Remarque 2.3 implique que $\mathbf{u}$ est dans $L^\infty(0,T;H^{m+3}(\Omega)^3)$. Il nous reste donc à prouver cette existence.

On définit le même problème approché (6.14), (6.15) avec $\mathbf{w}_j$ dans $H^m(\Omega)^3$, fonction propre du problème

$$\forall \mathbf{v} \in H^m(\Omega)^3,\ ((\mathbf{w}_j, \mathbf{v}))_m = \lambda_j(\mathbf{w}_j, \mathbf{v}), \tag{7.2}$$

où $((\ ,\ ))_m$ représente le produit scalaire dans $H^m(\Omega)^3$. La régularité du problème (7.2) implique que $\mathbf{w}_j$ est dans $H^{m+1}(\Omega)^3$ pourvu que Γ soit de classe $C^{m,1}$. En utilisant l'application bilinéaire $\mathbf{h}$ définie par (6.34), ayant remplacé la solution approchée $\mathbf{z}_m$ par $\mathbf{z}_p$ pour éviter les confusions de notations, l'équation (6.14) s'écrit

$$\begin{aligned}(\mathbf{z}_p'(t), \mathbf{w}_j) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\mathbf{z}_p(t), \mathbf{w}_j) + (\mathbf{u}(t).\nabla \mathbf{z}_p(t), \mathbf{w}_j) - (\mathbf{h}(\mathbf{u}(t), \mathbf{z}_p(t)), \mathbf{w}_j)\\ = (\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t) + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t) - 2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t).\nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j).\end{aligned} \tag{7.3}$$

Utilisant la base spéciale définie par (7.2), on obtient, après avoir supprimé la variable t pour simplifier les notations:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)} + ((\mathbf{u}.\nabla \mathbf{z}_p, \mathbf{z}_p))_m - ((\mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{z}_p), \mathbf{z}_p))_m\\ = ((\mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u} - 2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}.\nabla \mathbf{u}, \mathbf{z}_p))_m.\end{aligned} \tag{7.4}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T;V_2 \cap H^{m+2}(\Omega)^3)$. Le seul terme qui pose un problème est $((\mathbf{u}.\nabla \mathbf{z}_p, \mathbf{z}_p))_m$, car il fait intervenir la dérivée d'ordre $m+1$ de $\mathbf{z}_p$. Développons ce terme:

$$((\mathbf{u}.\nabla \mathbf{z}_p, \mathbf{z}_p))_m = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq m\\ |\beta|\leq m-1}} C_{\alpha,\beta}(\partial^\alpha \mathbf{u}.\nabla(\partial^\beta \mathbf{z}_p), \partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p) + \sum_{|\beta|=m}(\mathbf{u}.\nabla(\partial^\beta \mathbf{z}_p), \partial^\beta \mathbf{z}_p).$$

Mais la formule de Green donne

$$\sum_{|\beta|=m}(\mathbf{u}.\nabla(\partial^\beta \mathbf{z}_p), \partial^\beta \mathbf{z}_p) = \sum_{|\beta|=m}\sum_{l,i=1}^{3}(u_l, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_l}|\partial^\beta z_{p,i}|^2) = -\sum_{|\beta|=m}(\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \frac{1}{2}|\partial^\beta \mathbf{z}_p|^2) = 0,$$

car $\mathbf{u}$ est dans V. Nous obtenons donc

$$((\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_p,\mathbf{z}_p))_m = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq m\\|\beta|\leq m-1}} C_{\alpha,\beta}(\partial^\alpha\mathbf{u}.\nabla(\partial^\beta\mathbf{z}_p),\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p).$$

Il nous reste alors à majorer des termes du type $(\partial^\alpha\mathbf{u}.\nabla(\partial^\beta\mathbf{z}_p),\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p)$, avec

$$|\alpha+\beta|\leq m \text{ et } |\beta|\leq m-1. \tag{7.5}$$

En utilisant le Lemme 3.5, nous déduisons

$$|(\partial^\alpha\mathbf{u}.\nabla(\partial^\beta\mathbf{z}_p),\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p)|\leq\|\partial^\alpha\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla(\partial^\beta\mathbf{z}_p)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors (2.13), (2.6) et la condition (7.5) impliquent

$$|(\partial^\alpha\mathbf{u}.\nabla(\partial^\beta\mathbf{z}_p),\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p)|\leq C_1\|\mathbf{u}\|_{H^{m+2}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

Finalement nous obtenons

$$|((\mathbf{u}(t).\nabla\mathbf{z}_p(t),\mathbf{z}_p(t)))_m|\leq C\|\mathbf{u}(t)\|_{H^{m+2}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p(t)\|^2_{H^m(\Omega)}, \tag{7.6}$$

où C est une constante dépendant de m et C_1.

Ensuite nous devons majorer $|((\mathbf{h}(\mathbf{u},\mathbf{z}_p),\mathbf{z}_p))_m|$. Montrons, par deux exemples, les arguments utilisés dans ce type de majoration. Considérons comme premier exemple,

$$|((\mathbf{z}_p.\nabla\mathbf{u},\mathbf{z}_p))_m|\leq|\sum_{|\alpha|=m}(\mathbf{z}_p.\nabla(\partial^\alpha\mathbf{u}),\partial^\alpha\mathbf{z}_p)|+|\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq m\\|\alpha|\leq m-1}} C_{\alpha,\beta}(\partial^\beta\mathbf{z}_p.\nabla(\partial^\alpha\mathbf{u}),\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p)|.$$

D'une part, utilisant le Lemme 3.5, (2.16) et $|\alpha|=m$, nous obtenons

$$|(\mathbf{z}_p.\nabla(\partial^\alpha\mathbf{u}),\partial^\alpha\mathbf{z}_p)|\leq\|\mathbf{z}_p\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla(\partial^\alpha\mathbf{u})\|_{L^4(\Omega)}\|\partial^\alpha\mathbf{z}_p\|_{L^2(\Omega)}\leq C_2^{3/2}\|\mathbf{u}\|_{H^{m+2}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

D'autre part le Lemme 3.5, (2.15) et les conditions $|\alpha+\beta|\leq m$ et $|\alpha|\leq m-1$ impliquent

$$\begin{aligned}|(\partial^\beta\mathbf{z}_p.\nabla(\partial^\alpha\mathbf{u}),\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p)|&\leq\|\partial^\beta\mathbf{z}_p\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(\partial^\alpha\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p\|_{L^2(\Omega)}\\&\leq C_1\|\mathbf{u}\|_{H^{m+2}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)}.\end{aligned}$$

De ces deux majorations, il suit que

$$|((\mathbf{z}_p(t).\nabla\mathbf{u}(t),\mathbf{z}_p(t)))_m|\leq C\|\mathbf{u}(t)\|_{H^{m+2}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p(t)\|^2_{H^m(\Omega)}, \tag{7.7}$$

où C est une constante dépendant de m, C_1 et C_2. Considérons comme second exemple,

$$\begin{aligned}|((\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla(\frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{z}_p)}{\partial x_k}),\mathbf{z}_p))_m|&\leq|\sum_{|\alpha|=m}(\partial^\alpha(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}).\nabla(\frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{z}_p)}{\partial x_k}),\partial^\alpha\mathbf{z}_p)|\\&+|\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq m\\|\alpha|\leq m-1}} C_{\alpha,\beta}(\partial^\alpha(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}).\nabla(\partial^\beta(\frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{z}_p)}{\partial x_k})),\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p)|.\end{aligned}$$

De manière similaire aux majorations précédentes, utilisant en plus (7.1), d'une part on obtient

$$|(\partial^\alpha(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}).\nabla(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_p)}{\partial x_k}), \partial^\alpha \mathbf{z}_p)| \leq \|\partial^\alpha(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k})\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_p)}{\partial x_k})\|_{L^4(\Omega)} \|\partial^\alpha \mathbf{z}_p\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq C_2^{3/2} \|\mathbf{u}\|_{H^{m+2}(\Omega)} \|\mathbf{g}(\mathbf{z}_p)\|_{H^3(\Omega)} \|\mathbf{z}_p\|_{H^m(\Omega)} \leq C_m C_2^{3/2} \|\mathbf{u}\|_{H^{m+2}(\Omega)} \|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

D'autre part, grâce à $|\alpha| \leq m-1$, on a

$$|(\partial^\alpha(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}).\nabla\partial^\beta(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_p)}{\partial x_k}), \partial^{\alpha+\beta} \mathbf{z}_p)| \leq \|\partial^\alpha(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k})\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\partial^\beta(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_p)}{\partial x_k})\|_{L^2(\Omega)} \|\partial^{\alpha+\beta} \mathbf{z}_p\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq C_m C_1 \|\mathbf{u}\|_{H^{m+2}(\Omega)} \|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

De ces deux types de majorations, nous déduisons

$$|\sum_{k=1}^{3}((\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}(t).\nabla(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_p)}{\partial x_k}(t)), \mathbf{z}_p))_m| \leq C\|\mathbf{u}(t)\|_{H^{m+2}(\Omega)} \|\mathbf{z}_p(t)\|^2_{H^m(\Omega)}, \tag{7.8}$$

où C dépend de C_1, C_2, C_m et m.

Les autres termes venant de $((\mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{z}_p), \mathbf{z}_p))_m$, ainsi que les termes du membre de droite, se majorent de manière similaire. Un lemme analogue au Lemme 6.6 implique que la suite $\{\mathbf{z}_p\}$ est uniformément bornée par rapport à p dans $L^\infty(0, T; H^m(\Omega)^3)$. On en déduit l'existence d'une solution dans $L^\infty(0, T; H^m(\Omega)^3)$ du problème (6.11), (6.12). Comme nous l'avons expliqué précédemment, cela termine la démonstration du théorème.
$\triangle$

7.2 Régularité de la pression et des dérivées par rapport au temps

Nous étudions l'existence et la régularité de la pression $\tilde{p}$ (cf. Paragraphe 1) et de $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$, où $\mathbf{u}$ est la solution dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; V_2)$ du problème (2.1)-(2.5).

Lemme 7.3 *Sous les hypothèses du Théorème 5.6, le problème (1.9), (2.2)-(2.5) a une unique solution* $\mathbf{u}$ *dans* $L^\infty(\mathbb{R}^+; V_2)$ *et* $\tilde{p}$ *dans* $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)/\mathbb{R})$. *De plus* $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ *appartient à* $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega)^3 \cap V)$.

Démonstration. Soit $\mathbf{u}$ la solution dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; V_2)$ du problème (2.1)-(2.5). Posons

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \nu\Delta\mathbf{u} - \mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} + (\alpha_1 + \alpha_2)(\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}) - 2(\mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u})). \tag{7.9}$$

Avec cette notation le problème (2.1) s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \alpha_1\Delta(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) + \nabla p = \mathbf{f} + \mathbf{G}(\mathbf{u}). \tag{7.10}$$

Posons

$$\mathbf{l} = \mathbf{f} + \mathbf{G}(\mathbf{u}) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \alpha_1 \Delta(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}).$$

On remarque que, puisque $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$, les hypothèses sur $\mathbf{f}$ et la régularité de $\mathbf{u}$ impliquent que $\mathbf{l}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^{-1}(\Omega)^3)$. Mais l'équation variationnelle (2.17) implique que, pour presque tout $t \geq 0$,

$$\forall \mathbf{v} \in V, \; < \mathbf{l}(t), \mathbf{v} >= 0.$$

D'après [21], cela implique qu'il existe $p \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ tel que

$$\mathbf{l} = \nabla p.$$

Ainsi il existe un couple $(\mathbf{u}, p)$ vérifiant l'équation (2.1) avec les régularités ci-dessus. Mais l'équation (7.10) avec $p \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ montre que $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ est solution d'un problème de Stokes avec une viscosité α_1 et un membre de droite

$$\mathbf{f} + \mathbf{G}(\mathbf{u}) \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3).$$

La régularité de Γ implique que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \text{ appartient à } L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega)^3).$$

On en déduit que ∇p est dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$. Ainsi p appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$.

Posons

$$\tilde{p} = p + (2\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{u}.\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{4}|A_1|^2) - \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2, \tag{7.11}$$

où A_1 est le premier tenseur de Rivlin-Ericksen défini dans le Paragraphe 1. Tenant compte du fait que $H^2(\Omega)$ est une algèbre, la régularité de $\mathbf{u}$ implique que $\tilde{p}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$. Enfin nous pouvons conclure que le couple $(\mathbf{u}, \tilde{p})$ est l'unique solution dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; V_2) \times L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ du problème (1.9), (2.2)-(2.5).
$\triangle$

7.3 Solution classique

Tout d'abord nous rappelons un résultat classique.

Lemme 7.4 *Soit $T > 0$ et soit $\mathbf{v}$ appartenant à $H^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$. Alors pour tout $\mathbf{u}$ dans $L^2(\Omega)^3$,*

$$(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \mathbf{u}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[).$$

Le second lemme concerne le problème de Stokes et la dérivation par rapport au temps. On définit le problème de Stokes suivant: Pour $\mathbf{f}$ donné dans $L^2(\Omega)^3$, chercher $\mathbf{v}$ dans $H^2(\Omega)^3 \cap V$ et π dans $H^1(\Omega)$, solution de:

$$\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v} + \nabla \pi = \mathbf{f}. \tag{7.12}$$

Lemme 7.5 *Soient $T > 0$ et $\mathbf{w}$ dans $W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)^3)$. Pour presque tout t dans $[0,T]$, si $\mathbf{v}(t)$ est la solution dans $H^2(\Omega)^3 \cap V$ du problème (7.12) avec $\mathbf{f} = \mathbf{w}(t)$, alors $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t)$ est la solution dans $H^2(\Omega)^3 \cap V$ du problème (7.12) avec $\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(t)$. De plus $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ appartient à $L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^3 \cap V)$.*

Démonstration. Posons, pour tout $\mathbf{v}$ et tout $\mathbf{z}$ dans $H_0^1(\Omega)^3$,

$$(\mathbf{v},\mathbf{z})_{\alpha_1} = (\mathbf{v},\mathbf{z}) + \alpha_1(\nabla\mathbf{v},\nabla\mathbf{z}). \tag{7.13}$$

Pour presque tout $t \in [0,T]$, soit $\mathbf{v}(t)$ la solution dans $H^2(\Omega)^3 \cap V$ du problème (7.12) avec $\mathbf{f} = \mathbf{w}(t)$ et soit $\mathbf{v}_1(t)$ la solution dans le même ensemble du même problème avec $\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(t)$. Alors, selon la notation (7.13), pour tout $\mathbf{z} \in V$,

$$(\mathbf{v}(t),\mathbf{z})_{\alpha_1} = (\mathbf{w}(t),\mathbf{z}) \text{ et } (\mathbf{v}_1(t),\mathbf{z})_{\alpha_1} = (\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(t),\mathbf{z}). \tag{7.14}$$

Soient $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$ et $\mathbf{z} \in V$. Utilisant le Lemme 7.4 et les égalités (7.14), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T (\mathbf{v}_1(t),\mathbf{z})_{\alpha_1}\varphi(t)\,dt &= \int_0^T (\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(t),\mathbf{z})\varphi(t)\,dt = \int_0^T \frac{d}{dt}(\mathbf{w}(t),\mathbf{z})\varphi(t)\,dt \\ &= -\int_0^T (\mathbf{w}(t),\mathbf{z})\varphi'(t)\,dt = -\int_0^T (\mathbf{v}(t),\mathbf{z})_{\alpha_1}\varphi'(t)\,dt.\end{aligned}$$

De là, on déduit

$$\forall \mathbf{z} \in V,\ \frac{d}{dt}(\mathbf{v}(t),\mathbf{z})_{\alpha_1} = (\mathbf{v}_1(t),\mathbf{z})_{\alpha_1} \text{ pour presque tout } t \text{ dans } [0,T]. \tag{7.15}$$

On munit $H_0^1(\Omega)^3$ du produit scalaire $(\ ,\ )_{\alpha_1}$ et soit $V^{\perp\alpha_1}$ l'espace orthogonal de V associé. Puisque $H_0^1(\Omega)^3 = V \oplus V^{\perp\alpha_1}$, de l'égalité (7.15), on déduit

$$\forall \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega)^3,\ \frac{d}{dt}(\mathbf{v}(t),\mathbf{z})_{\alpha_1} = (\mathbf{v}_1(t),\mathbf{z})_{\alpha_1} \text{ pour presque tout } t \text{ dans } [0,T]. \tag{7.16}$$

Soit $\mathbf{z}$ donné dans $H_0^1(\Omega)^3$. L'application: $\mathbf{v} \to (\nabla\mathbf{v},\nabla\mathbf{z})$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)^3$ muni du produit scalaire $(\ ,\ )_{\alpha_1}$. D'après le théorème de représentation de Riesz, on sait qu'il existe $\mathbf{h}(\mathbf{z}) \in H_0^1(\Omega)^3$ tel que

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3,\ (\nabla\mathbf{v},\nabla\mathbf{z}) = (\mathbf{v},\mathbf{h}(\mathbf{z}))_{\alpha_1}.$$

De cette égalité et de l'égalité (7.16) où $\mathbf{z}$ est remplacé par $\mathbf{h}(\mathbf{z})$, nous déduisons

$$\forall \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega)^3,\ \frac{d}{dt}(\nabla\mathbf{v}(t),\nabla\mathbf{z}) = (\nabla\mathbf{v}_1(t),\nabla\mathbf{z}) \text{ pour presque tout } t \text{ dans } [0,T]).$$

De là, comparant cette dernière égalité avec (7.15), nous obtenons

$$\forall \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega)^3,\ \frac{d}{dt}(\mathbf{v}(t),\mathbf{z}) = (\mathbf{v}_1(t),\mathbf{z}) \text{ pour presque tout } t \text{ dans } [0,T],$$

et considérant que $L^2(\Omega)^3$ est un sous-ensemble de $H^{-1}(\Omega)^3$, cela devient

$$\forall \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega)^3,\ \frac{d}{dt} < \mathbf{v}, \mathbf{z} >_{H^{-1},H_0^1} = < \mathbf{v}_1, \mathbf{z} >_{H^{-1},H_0^1} \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[).$$

D'après [20], on en déduit, pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t) = \mathbf{v}_1(t)$$

Enfin il suit, de la régularité du problème de Stokes appliquée à $\mathbf{v}_1$, que $\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ appartient à $L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^3 \cap V)$.
$\triangle$

Le théorème suivant prouve l'existence d'une solution au sens classique de l'équation (1.9).

Théorème 7.6 *Soit $T > 0$. Soit Ω un ouvert de $I\!R^3$, borné et simplement connexe. Supposons que la solution $\mathbf{u}$ de (2.1)-(2.5) appartienne à $L^\infty(0,T;V_2)$. Si la frontière Γ est de classe $C^{6,1}$ et si les données ont la régularité suivante:*

$$\mathbf{u}_0 \in H^7(\Omega)^3 \cap V,\ \mathbf{f} \in L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3), \mathbf{rot}\,\mathbf{f} \in L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \in L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3),$$

alors le problème (1.9), (2.2)-(2.5) a une solution unique $(\mathbf{u}, \tilde{p})$ dans

$$C^1([0,T];C^3(\overline{\Omega})^3) \times C([0,T];C^2(\overline{\Omega})/I\!R).$$

Démonstration. On commence par appliquer le Théorème 7.2 avec $m = 4$. On obtient $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H^7(\Omega)^3)$.

Passons à la régularité de $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$. Dans la démonstration du Lemme 7.3, on a montré que le système (7.10) peut être interprété comme un problème de Stokes de solution $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ dans $L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^3 \cap V)$. Le membre de droite de (7.10) est $\mathbf{G}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}$, où $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ est défini par (7.9). Du fait que $H^4(\Omega)$ est une algèbre, on déduit facilement que $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ et $\mathbf{G}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}$ appartiennent à $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$, compte tenu de la régularité de $\mathbf{f}$. La régularité de Γ et de la donnée $\mathbf{G}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}$ de ce problème de Stokes implique que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \text{ appartient à } L^\infty(0,T;H^6(\Omega)^3). \tag{7.17}$$

Ensuite étudions la régularité de $\dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$. Dans ce but, déterminons $\dfrac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial t}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial t} &= \nu\Delta(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) - \mathbf{rot}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (2\alpha_1+\alpha_2)\Delta(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})) \times \mathbf{u} - \mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \\ &+(\alpha_1+\alpha_2)(\Delta(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.\nabla\mathbf{u}) + \Delta(\mathbf{u}.\nabla(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})) - 2\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.\nabla(\Delta\mathbf{u}) - 2\,\mathbf{u}.\nabla(\Delta(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}))).\end{aligned}$$

La régularité H^7 de $\mathbf{u}$, H^6 de $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ et les algèbres $H^3(\Omega)$ et $H^4(\Omega)$ impliquent que

$$\mathbf{rot}(\Delta(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})) \times \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{u}.\nabla(\Delta(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})) \text{ sont dans } L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3),$$

$$\mathbf{rot}(\Delta \mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.\nabla(\Delta \mathbf{u}) \text{ sont dans } L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3).$$

Puisque $\mathbf{u}.\nabla(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})$ est dans $L^\infty(0,T;H^5(\Omega)^3)$, $\Delta(\mathbf{u}.\nabla(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}))$ est dans $L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)$. De même $\Delta(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.\nabla \mathbf{u})$ est dans $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$ et $\Delta(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})$ dans $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$. Enfin $\mathbf{rot}(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) \times \mathbf{u}$ est dans $L^\infty(0,T;H^5(\Omega)^3)$ et $\mathbf{rot}\,\mathbf{u} \times \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ est dans $L^\infty(0,T;H^6(\Omega)^3)$. De ces résultats, nous déduisons que

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial t} \text{ appartient à } L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3).$$

Ainsi, puisque $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$ est dans $L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)$, nous pouvons conclure que

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \text{ appartient à } W^{1,\infty}(0,T;H^3(\Omega)^3).$$

Appliquons le Lemme 7.5. Tout d'abord $\mathbf{G}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)^3)$. Ensuite $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ est la solution du problème de Stokes (7.12) avec pour second membre $\mathbf{G}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}$. Alors il suit du Lemme 7.5 que $\dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ est la solution de (7.12) avec pour second membre $\dfrac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$. Enfin, de la régularité de Γ et de $\dfrac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \in L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)$, nous déduisons que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \text{ appartient à } L^\infty(0,T;H^5(\Omega)^3),$$

et donc

$$\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(0,T;H^5(\Omega)^3).$$

Grâce aux théorèmes d'inclusion de Sobolev, nous obtenons que

$$\mathbf{u} \text{ appartient à } C^1([0,T];C^3(\overline{\Omega})).$$

Puis, considérant l'équation (7.10), nous avons

$$\nabla p = \mathbf{G}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \alpha_1 \Delta(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}).$$

De l'étude précédente, nous déduisons

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) \in W^{1,\infty}(0,T;H^3(\Omega)^3),\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in W^{1,\infty}(0,T;H^5(\Omega)^3) \text{ et } \Delta(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) \in W^{1,\infty}(0,T;H^3(\Omega)^3).$$

Avec la régularité de $\mathbf{f}$, cela donne

$$\nabla p \in W^{1,\infty}(0, T; H^3(\Omega)^3)$$

et, de là

$$p \text{ appartient à } W^{1,\infty}(0, T; H^4(\Omega)).$$

Finalement, de l'équation (7.11), nous déduisons que

$$\tilde{p} \text{ appartient à } W^{1,\infty}(0, T; H^4(\Omega)),$$

et les théorèmes d'inclusion de Sobolev impliquent que

$$\tilde{p} \text{ appartient à } C([0, T]; C^2(\overline{\Omega})).$$

$\triangle$

Chapitre II

Fluide de grade deux avec Ω non simplement connexe

1 Introduction

Soit Ω un domaine borné lipschitzien de $\mathbb{R}^3$. Nous posons

$$X(\Omega) = H(\mathbf{rot}; \Omega) \cap H(\mathrm{div}; \Omega),$$

$$X_T(\Omega) = \{\mathbf{v} \in X(\Omega); \mathbf{v}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$
$$X_N(\Omega) = \{\mathbf{v} \in X(\Omega); \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega\}$$

et

$$K_T(\Omega) = \{\mathbf{v} \in X_T(\Omega); \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0 \text{ et } \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

On munit ces espaces de la norme

$$\|\mathbf{v}\|_{X(\Omega)} = (\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{div}\,\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Rappelons deux théorèmes de [3].

Théorème 1.1 *Supposons le domaine Ω de classe $C^{1,1}$; alors l'espace $X_T(\Omega)$ s'injecte continuement dans $H^1(\Omega)^3$.*

Théorème 1.2 *Supposons le domaine Ω de classe $C^{1,1}$; alors l'espace $X_N(\Omega)$ s'injecte continuement dans $H^1(\Omega)^3$.*

Nous allons préciser la géométrie de Ω (cf. [3]). Tout d'abord nous avons besoin de la définition suivante qui étend l'étude des vecteurs potentiels dans les domaines lipschitziens au cas de domaines non nécessairement situés d'un seul côté de leurs frontières.

Définition 1.3 *Un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$ est appelé pseudo-lipschitzien si pour tout point $\mathbf{x}$ sur la frontière Γ il existe un entier $r(\mathbf{x})$ égal à 1 ou 2 et un nombre réel strictement positif ρ_0 tels que , pour tout nombre réel ρ avec $0 < \rho < \rho_0$, l'intersection de Ω avec la boule de centre $\mathbf{x}$ et de rayon ρ a $r(\mathbf{x})$ composantes connexes, chacune d'elles étant lipschitzienne.*

On suppose que Ω est un domaine lipschitzien de $\mathbb{R}^3$.
(i) Nous ne supposons pas que la frontière Γ de Ω est connexe et nous notons Γ_i, $0 \leq i \leq p$, les composantes connexes de Γ, Γ_0 étant la frontière de la seule composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$.
(ii) Nous ne supposons pas que Ω est simplement connexe, mais l'hypothèse suivante permet de "couper" convenablement Ω afin de le réduire à une région simplement connexe.

Hypothèse 1.4 *Il existe J surfaces ouvertes Σ_j, $1 \leq j \leq J$, appelées "coupures", telles que:*
(i)chaque surface Σ_j est une partie ouverte d'une variété régulière $\mathcal{M}_j$,
(ii)la frontière de Σ_j est contenue dans Γ pour $1 \leq j \leq J$,
(iii)l'intersection $\overline{\Sigma_i} \cap \overline{\Sigma_j}$ est vide pour $i \neq j$,
(iv)l'ensemble ouvert

$$\Omega^o = \Omega \backslash \bigcup_{j=1}^{J} \Sigma_j$$

est pseudo-Lipschitzien et simplement connexe.

Tout ensemble de telles surfaces est appelé un "ensemble admissible de coupures". Cette hypothèse est satisfaite dans tous les exemples usuels de géométrie que nous avons à l'esprit.

Notations 1.5 *Soit $\{\Sigma_j; 1 \leq j \leq J\}$ un ensemble admissible de coupures, soit Ω^o défini comme dans l'Hypothèse 1.4. Fixons un vecteur normal unitaire $\mathbf{n}$ sur chaque Σ_j, pour $1 \leq j \leq J$.*
(i) Pour toute fonction q dans $H^1(\Omega^o)$, notons $[q]_j$ le saut de q à travers Σ_j (c'est-à-dire les différences des traces de q) le long de $\mathbf{n}$.
(ii)Pour toute fonction q dans $H^1(\Omega^o)$, ∇q est le gradient de q au sens des distributions dans $\mathcal{D}'(\Omega^o)$. Il appartient à $L^2(\Omega^o)^3$ et peut donc être prolongé à $L^2(\Omega)^3$. Pour distinguer cette extension du gradient de q dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, nous le notons $\tilde{\nabla} q$.

Rappelons les résultats suivants, démontrés dans [3].

Proposition 1.6 *La dimension de l'espace $K_T(\Omega)$ est égale à J. Il est engendré par les fonctions $\tilde{\nabla} q_j^T$, $1 \leq j \leq J$, où chaque q_j^T est la solution dans $H^1(\Omega^o)$, unique à une constante additive près, du problème*

$$\begin{cases} -\Delta q_j^T = 0 \text{ dans } \Omega^o \text{ et } \nabla q_j^T.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ [q_j^T]_k = \text{constante et } [\nabla q_j^T.\mathbf{n}]_k = 0, \ 1 \leq k \leq J, \\ < \nabla q_j^T.\mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_k} = \delta_{jk}, \ 1 \leq k \leq J. \end{cases}$$

Théorème 1.7 *Une fonction $\mathbf{v}$ dans $H(\mathrm{div}; \Omega)$ satisfait*

$$\mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 \text{ et } < \mathbf{v}.\mathbf{n} >_{\Gamma_i} = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq p, \tag{1.2}$$

si et seulement s'il existe un vecteur potentiel $\boldsymbol{\psi}$ *dans* $X(\Omega)$ *tel que*

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi} \text{ et } \operatorname{div}\boldsymbol{\psi} = 0 \text{ dans } \Omega,\\ &\boldsymbol{\psi}.\mathbf{n} = 0 \textbf{ sur } \Gamma,\ <\boldsymbol{\psi}.\mathbf{n}, 1>_{\Sigma_j} = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq J. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Cette fonction $\boldsymbol{\psi}$ *est unique.*

Lemme 1.8 *Sur l'espace* $X_T(\Omega)$*, la semi-norme*

$$\mathbf{v} \to \|\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{J} | < \mathbf{v}.\mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_j} |,$$

est équivalente à la norme $\| \ \|_{X(\Omega)}$ *définie par (1.1).*

Théorème 1.9 *Supposons que le domaine* Ω *ait une frontière* Γ *de classe* $C^{m,1}$ *pour un entier* $m \geq 1$*. alors, l'espace de fonctions*

$$\{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3; \mathbf{rot}\,\mathbf{v} \in H^{m-1}(\Omega)^3,\ \operatorname{div}\mathbf{v} \in H^{m-1}(\Omega) \text{ et } \mathbf{v}.\mathbf{n} \in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\}$$

s'injecte continuement dans $H^m(\Omega)^3$*.*

Dans le but d'établir un lemme analogue au Lemme I.2.1 dans le cas où Ω n'est pas simplement connexe, nous définissons le sous-espace de $L^2(\Omega)^3$ suivant:

$$H = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3; \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\ \mathbf{v}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \tag{1.4}$$

Ensuite, l'opérateur P de projection de Helmholtz est défini comme l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega)^3$ sur H. Rappelons que

$$H^{\perp} = \{\nabla\mu; \mu \in H^1(\Omega)\}. \tag{1.5}$$

Alors, pour tout $\mathbf{v} \in H^2(\Omega)^3 \cap V$, on a $\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v} = P(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v}) + \nabla\pi$. Ecrivant cette équation sous la forme

$$\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v} + \nabla(-\pi) = P(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v}),$$

on en déduit que $\mathbf{v}$ est la solution d'un problème de Stokes avec un membre de droite $P(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v})$ dans $L^2(\Omega)^3$. Donc, si Γ est de classe $C^{1,1}$, il existe une constante $C_1(\alpha_1)$ telle que

$$\|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1(\alpha_1)\|P(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.6}$$

Introduisons l'espace

$$V_2 = \{\mathbf{v} \in V \cap H^2(\Omega)^3; \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)^3\}. \tag{1.7}$$

Le lemme suivant établit une équivalence fondamentale de normes, dans le cas où Ω est non simplement connexe.

Lemme 1.10 *Soit Ω un domaine borné de $I\!R^3$, de frontière Γ de classe $C^{2,1}$. Soit P la projection de Helmholtz de $L^2(\Omega)^3$. Alors tout $\mathbf{v}$ dans V_2 appartient à $H^3(\Omega)^3$ et il existe une constante $C_2(\alpha_1)$ telle que*

$$\forall \mathbf{v} \in V_2,\ \|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)} \leq C_2(\alpha_1)(\|\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)} + \|P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}. \tag{1.8}$$

Démonstration. Soit $\mathbf{v}$ un élément de V_2. D'une part,

$$\mathrm{div}(P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})) = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}).\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{1.9}$$

D'autre part, puisque $\mathbf{rot}(P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})) = \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})$, $P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})$ appartient à $H(\mathbf{rot}; \Omega)$. De là $P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})$ appartient à $X_T(\Omega)$. Alors le Théorème 1.1 implique que $P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})$ appartient à $H^1(\Omega)^3$ et qu'il existe une constante C' telle que

$$\|P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|_{H^1(\Omega)} \leq C'(\|P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}. \tag{1.10}$$

Ensuite, la décomposition de Helmholtz donne

$$\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v} + \nabla(-\pi) = P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}).$$

De là, $\mathbf{v}$ est la solution d'un problème de Stokes avec un second membre $P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})$ qui appartient à $H^1(\Omega)^3$. Donc, compte tenu de la régularité de Γ, $\mathbf{v}$ appartient à $H^3(\Omega)^3$ et il existe une constante $K(\alpha_1)$ telle que

$$\|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)} \leq K(\alpha_1)\|P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.11}$$

Finalement, de (1.10) et (1.11), nous déduisons $C_2(\alpha_1) = K(\alpha_1)C'$.
$\triangle$

On démontre, pour la projection de Helmholtz, un résultat analogue au Lemme I.7.5 pour le problème de Stokes.

Lemme 1.11 *Soit $T > 0$. Soit P la projection de Helmholtz. Alors pour tout $\mathbf{v}$ dans $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^3)$,*

$$P(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}) = \frac{\partial P(\mathbf{v})}{\partial t}.$$

Démonstration. Soit $\mathbf{v}$ appartenant à $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^3)$. En premier lieu, les décompositions de Helmholtz de $\mathbf{v}$ et $\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ s'écrivent

$$\mathbf{v} = P(\mathbf{v}) + \nabla \pi \text{ et } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = P(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}) + \nabla \tilde{\pi}.$$

Clairement, pour démontrer le lemme, il suffit d'établir

$$\nabla(\frac{\partial \pi}{\partial t}) = \nabla \tilde{\pi}.$$

Rappelons que $\nabla\pi$ est déterminé de manière unique par:

$$\pi \in H^1(\Omega) \text{ et } \forall\mu \in H^1(\Omega),\ (\nabla\pi, \nabla\mu) = (\mathbf{v}, \nabla\mu). \tag{1.12}$$

De même $\nabla\tilde{\pi}$ est déterminé par:

$$\tilde{\pi} \in H^1(\Omega) \text{ et } \forall\mu \in H^1(\Omega), (\nabla\tilde{\pi}, \nabla\mu) = (\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}, \nabla\mu). \tag{1.13}$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(]0,T[)$. En utilisant (1.13), (1.12) et le Lemme I.7.4, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T (\nabla\tilde{\pi}(t), \nabla\mu)\psi(t)\,dt &= \int_0^T (\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}(t), \nabla\mu)\psi(t)\,dt = \int_0^T \frac{d}{dt}(\mathbf{v}(t), \nabla\mu)\psi(t)\,dt \\ &= -\int_0^T (\mathbf{v}(t), \nabla\mu)\psi'(t)\,dt = -\int_0^T (\nabla\pi(t), \nabla\mu)\psi'(t)\,dt.\end{aligned}$$

D'où on déduit

$$\forall\mu \in H^1(\Omega),\ \frac{d}{dt}(\nabla\pi, \nabla\mu) = (\nabla\tilde{\pi}, \nabla\mu) \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[).$$

D'après la définition de H, nous avons

$$\forall\mathbf{w} \in H \text{ et } \forall\mu \in H^1(\Omega),\ \frac{d}{dt}(\nabla\pi, \nabla\mu + \mathbf{w}) = (\nabla\tilde{\pi}, \nabla\mu + \mathbf{w}) \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[).$$

Puisque $L^2(\Omega)^3 = H \oplus H^\perp$, considérant (1.5), on déduit que

$$\forall\mathbf{w} \in L^2(\Omega)^3,\ \frac{d}{dt}(\nabla\pi, \mathbf{w}) = (\nabla\tilde{\pi}, \mathbf{w}) \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[).$$

D'après [20], cela implique

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\pi) = \nabla\tilde{\pi}.$$

$\triangle$

Nous nous proposons de résoudre le système d'équations (I.2.1)-(I.2.5), qui régit les fluides de grade 2, dans le cas où Ω n'est pas simplement connexe. Comme nous l'avons vu au Paragraphe I.2, ce problème admet la formulation variationnelle (I.2.17), (I.2.4). Cependant, pour obtenir une majoration *a priori* dans V_2, il ne suffit pas de prendre le rotationnel de l'équation (I.2.1) comme dans le cas Ω simplement connexe, il faut aussi projeter l'équation (I.2.1) dans H à l'aide de P afin de pouvoir utiliser le Lemme 1.10. Remarquant que $P(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ puisque $\mathbf{u} \in V$ et

$$P(\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})) = \frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}),$$

que l'on peut justifier sous les conditions du Lemme 1.11, cela donne formellement

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) + \frac{\nu}{\alpha_1}P(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) + P(\mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u}) \\ &\quad +(\alpha_1 + \alpha_2)(-P(\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u})) + 2P(\mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u}))) = P(\mathbf{f}) + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u}.\end{aligned} \tag{1.14}$$

C'est en combinant les inéquations obtenues à partir de (I.2.1), (I.2.22) et (1.14) que nous obtiendrons une décroissance exponentielle en fonction du temps de la norme H^1 de la vitesse, puis la majoration *a priori* dans V_2 de la vitesse, pour des données suffisamment petites.

La composition de ce chapitre suit celle du chapitre précédent. Le Paragraphe 2 est consacré à l'établissement d'estimations formelles *a priori* satisfaites par des solutions régulières du problème, puis à la démonstration de l'unicité de la solution si elle existe. L'existence globale en temps est prouvée au Paragraphe 3 en appliquant une méthode de Galerkin avec une base spéciale. Enfin, au Paragraphe 4, nous étudions la régularité de la solution à l'aide des résultats d'existence et d'unicité.

2 Estimations *a priori* et unicité

Les estimations formelles de ce paragraphe seront appliquées à la solution de l'approximation de Galerkin du problème (I.2.17), (I.2.4) et la régularité de cette solution les validera. On munit V_2 du produit scalaire

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{V_2} = (P(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u}), P(\mathbf{v}-\alpha_1\Delta\mathbf{v})) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u}), \mathbf{rot}(\mathbf{v}-\alpha_1\Delta\mathbf{v})) \tag{2.1}$$

et de la norme associée

$$\|\mathbf{v}\|_{V_2} = (\mathbf{v},\mathbf{v})_{V_2}^{1/2}. \tag{2.2}$$

Alors le Lemme 1.10 implique

$$\forall \mathbf{v} \in V_2,\ \|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)} \leq C_2(\alpha_1)\|\mathbf{v}\|_{V_2}. \tag{2.3}$$

On commence par un lemme analogue au Lemme I.3.1.

Lemme 2.1 *Supposons que le problème (I.2.17), (I.2.4) ait une solution* $\mathbf{u}$ *dans* $C^0(0,T;V_2)$ *avec* $\mathbf{u}'$ *dans* $L^\infty(0,T;V)$. *Posons*

$$K_1 = \frac{\nu}{2(\mathcal{P}^2+\alpha_1)},\ K_2 = \frac{3}{\alpha_1}|\alpha_1+\alpha_2|C_1C_2(\alpha_1).$$

Alors cette solution satisfait l'inégalité suivante pour tout t *dans* $[0,T]$*:*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(t)\|_V \leq e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_0\|_V + \int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds \\ -K_2\int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}(s)\|_{V_2})\|\mathbf{u}(s)\|_V\,ds,\end{aligned} \tag{2.4}$$

où $\|\ .\ \|_V$ *est défini par (I.3.1).*

Démonstration. Les arguments sont les mêmes que pour le Lemme I.3.1, il suffit de substituer $C_2(\alpha_1)$ à $C(\alpha_1)$. Ainsi, utilisant (I.2.15), (I.3.4) et (2.3), on obtient

$$|b(\mathbf{u}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t))| \leq \|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{u}(t)|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C_1C_2(\alpha_1)}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}\|\mathbf{u}(t)\|^2_V.$$

En substituant dans l'inéquation (I.3.5) et en utilisant les constantes K_1 et K_2 définies dans le Lemme 2.1, on est conduit à l'inégalité (I.3.7). Alors, en intégrant, on déduit (2.4). $\triangle$

Rappelons que, pour tout $\mathbf{v} \in H(\mathbf{rot};\Omega)$,

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)} = (\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

Théorème 2.2 *Supposons, en plus des hypothèses du Lemme 2.1, que* $\mathbf{u}$ *appartienne à* $L^1(0,T;H^4(\Omega)^3)$. *Alors* $y(t) = \|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}$ *satisfait l'inégalité différentielle dans* $[0,T]$*:*

$$\begin{aligned} y'(t) \le K_3(e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_0\|_V + \int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds) + \|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \\ -C(\alpha_1,\alpha_2)(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)} - y(t))y(t) - K_3K_2\int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - y(s))\ \|\mathbf{u}(s)\|_V\,ds, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où K_1 *et* K_2 *sont définies dans le Lemme 2.1,*

$$K_3 = \frac{\nu}{\alpha_1}\max(1,\sqrt{2/\alpha_1}) \tag{2.7}$$

et

$$C(\alpha_1,\alpha_2) = \min(2\,D_1, D_2), \tag{2.8}$$

avec

$$D_1 = [1 + (\sqrt{6} + 2(1+2\sqrt{3}))|\alpha_1+\alpha_2|C_2(\alpha_1)]C_1C_1(\alpha_1)$$

et

$$D_2 = C_1C_2(\alpha_1) + |\alpha_1+\alpha_2|(C_2(\alpha_1))^2[(\sqrt{6} + 2(\sqrt{3}+\sqrt{2}\,))C_1 + (\sqrt{6}+2\sqrt{2})C_2^{3/2}].$$

Démonstration. Posons $\mathbf{z} = \boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}$. Prendre le produit scalaire de (I.2.22) avec $\mathbf{z}(t)$ donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{z}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{z}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - b(\mathbf{z}(t);\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t)) + (\alpha_1+\alpha_2)\{-b(\Delta\mathbf{u}(t);\boldsymbol{\omega}(t),\mathbf{z}(t)) \\ +b(\boldsymbol{\omega}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t)) + 2\sum_{k=1}^3[b(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k};\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k},\mathbf{z}(t)) - b(\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k};\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k},\mathbf{z}(t)) \\ +(\nabla u_k(t)\times\nabla\Delta u_k(t),\mathbf{z}(t))]\} = (\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t),\mathbf{z}(t)) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t)). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Puisque $\mathbf{u}$ est solution de (I.2.1) dans $C^0(0,T;V_2)$, comme au Paragraphe I.7.3, on montre que $\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}$ est solution d'un problème de Stokes avec second membre dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)$. Compte tenu de la régularité de Γ, cela implique que

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^3) \text{ et } \nabla p \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3).$$

De là $\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u}\in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)^3)$. Alors, grâce au Lemme 1.11 et à la régularité de ∇p, l'équation (1.14) est justifiée et devient une égalité dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)$. Posons $\mathbf{w}=P(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})$. Multipliant scalairement (1.14) par $\mathbf{w}(t)$, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{w}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+(P(\mathbf{rot}(\mathbf{u}(t)-(2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}(t))\times\mathbf{u}(t)),\mathbf{w}(t))$$
$$+(\alpha_1+\alpha_2)[(2P((\mathbf{u}.\nabla\Delta\mathbf{u})(t))-P(\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u})(t)),\mathbf{w}(t))]=(P(\mathbf{f}(t))+\frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u}(t),\mathbf{w}(t)).\tag{2.10}$$

Puis l'addition des équations (2.10) et (2.9) et la définition (2.2) donnent

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{V_2}+\frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{V_2}+(P(\mathbf{rot}(\mathbf{u}(t)-(2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}(t))\times\mathbf{u}(t)),\mathbf{w}(t))\\&-b(\mathbf{z}(t);\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t))+(\alpha_1+\alpha_2)\{-b(\Delta\mathbf{u}(t);\boldsymbol{\omega}(t),\mathbf{z}(t))+b(\boldsymbol{\omega}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t))\\&+2\sum_{k=1}^{3}[b(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k};\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k},\mathbf{z}(t))-b(\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k};\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k},\mathbf{z}(t))+(\nabla u_k(t)\times\nabla\Delta u_k(t),\mathbf{z}(t))]\\&+2(P(\mathbf{u}(t).\nabla\Delta\mathbf{u}(t)),\mathbf{w}(t))-(P(\Delta(\mathbf{u}(t).\nabla\mathbf{u}(t))),\mathbf{w}(t))\}\\&=(P(\mathbf{f}(t))+\frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u}(t),\mathbf{w}(t))+(\mathbf{rot}(\mathbf{f}(t)+\frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u}(t)),\mathbf{z}(t)).\end{aligned}\tag{2.11}$$

Pour majorer les termes issus de l'équation (2.9), on utilise les estimations établies dans la démonstration du Théorème I.3.6, l'inégalité (I.2.12) étant remplacée par l'inégalité (2.3), ce qui consiste à remplacer $C(\alpha_1)$ par $C_2(\alpha_1)$. Ainsi

$$\begin{aligned}&|b(\mathbf{z}(t);\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t))|\le\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{z}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\le C_1C_2(\alpha_1)\|\mathbf{z}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}\le C_1C_2(\alpha_1)\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{V_2},\end{aligned}\tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}|b(\Delta\mathbf{u}(t);\boldsymbol{\omega}(t),\mathbf{z}(t))|&\le C_2^{3/2}\|\Delta\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\\&\le\sqrt{6}\,C_2^{3/2}(C_2(\alpha_1))^2\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{V_2},\end{aligned}\tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}|b(\boldsymbol{\omega}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t))|&\le\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}|\Delta\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\\&\le\sqrt{6}\,C_1(C_2(\alpha_1))^2\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{V_2},\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}|\sum_{k=1}^{3}b(\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k};\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k},\mathbf{z}(t))|&\le\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\\&\le\sqrt{2}\,C_1(C_2(\alpha_1))^2\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{V_2},\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}|\sum_{k=1}^{3}b(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k},\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k},\mathbf{z}(t))|&\le\sqrt{2}\,C_2^{3/2}\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial^2\mathbf{u}(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\\&\le\sqrt{2}\,C_2^{3/2}(C_2(\alpha_1))^2\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{V_2}\end{aligned}\tag{2.16}$$

et

$$
|\sum_{k=1}^{3}(\nabla u_k(t)\times\nabla\Delta u_k(t),\mathbf{z}(t))| \le \|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}|\Delta\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)}
$$
$$
\le \sqrt{3}\, C_1(C_2(\alpha_1))^2\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2. \tag{2.17}
$$

Considérons maintenant les termes issus de l'équation (2.10). Tout d'abord le Lemme I.3.4 donne

$$
|(P(\mathbf{rot}(\mathbf{u}(t)-(2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}(t))\times\mathbf{u}(t)),\mathbf{w}(t))|
$$
$$
\le \|\mathbf{rot}(\mathbf{u}(t)-(2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}(t))\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Puis, d'une part, pour tout $\mathbf{v}$ dans V_2,

$$
\|\mathbf{rot}(\mathbf{v}-(2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)} \le \|\mathbf{rot}(\mathbf{v}-\alpha_1\Delta\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)} + |\alpha_1+\alpha_2|\|\mathbf{rot}\,\Delta\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Alors, grâce au Lemme I.3.3 et à (2.3), on peut écrire

$$
\|\mathbf{rot}(\mathbf{u}(t)-(2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}(t))\|_{L^2(\Omega)} \le (1+\sqrt{6}\,|\alpha_1+\alpha_2|C_2(\alpha_1))\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}.
$$

D'autre part (I.2.13) et (1.6) impliquent

$$
\|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_1C_1(\alpha_1)\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Nous obtenons donc

$$
|(P(\mathbf{rot}(\mathbf{u}(t)-(2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}(t))\times\mathbf{u}(t)),\mathbf{w}(t))|
$$
$$
\le (1+\sqrt{6}\,|\alpha_1+\alpha_2|C_2(\alpha_1))C_1C_1(\alpha_1)\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}. \tag{2.18}
$$

Ensuite, clairement

$$
|(P(\Delta(\mathbf{u}(t).\nabla\mathbf{u}(t))),\mathbf{w}(t))| \le \|\Delta(\mathbf{u}(t).\nabla\mathbf{u}(t))\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Considérant que, pour tout $\mathbf{v}$ dans V_2,

$$
\Delta(\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}) = \Delta\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}.\nabla\Delta\mathbf{v} + 2\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_k}.\nabla(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_k}),
$$

on déduit par Cauchy-Schwarz,

$$
\|\Delta(\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)} \le \|\Delta\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega)}|\Delta\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)} + 2\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial^2\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Alors (I.2.15), (I.2.13), le Lemme I.3.3, (1.6) et (2.3) impliquent

$$
\|\Delta(\mathbf{u}(t).\nabla\mathbf{u}(t))\|_{L^2(\Omega)} \le 2(1+\sqrt{3})C_1C_1(\alpha_1)C_2(\alpha_1)\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2},
$$

puis

$$
|(P(\Delta(\mathbf{u}(t).\nabla\mathbf{u}(t))),\mathbf{w}(t))| \le 2(1+\sqrt{3})C_1C_1(\alpha_1)C_2(\alpha_1)\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}. \tag{2.19}
$$

De manière analogue

$$|(P(\mathbf{u}(t).\nabla\Delta\mathbf{u}(t)),\mathbf{w}(t))| \le \|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}|\Delta\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

d'où

$$|(P(\mathbf{u}(t).\nabla\Delta\mathbf{u}(t)),\mathbf{w}(t))| \le \sqrt{3}\,C_1C_1(\alpha_1)C_2(\alpha_1)\|\mathbf{w}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}. \tag{2.20}$$

Rassemblant les inégalités (2.12)-(2.20), les substituant dans l'équation (2.11), simplifiant par $\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2} \le D_1\|\mathbf{w}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + D_2\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}\\ +\|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)},\end{aligned}$$

avec D_1 et D_2 définies dans le Théorème 2.2. Remarquant que

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \le \max(1,\sqrt{2/\alpha_1})\|\mathbf{u}(t)\|_V,$$

ces normes étant définies par (I.3.1) et (2.5), cela devient, en utilisant la constante K_3 définie par (2.7),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2} \le D_1\|\mathbf{w}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + D_2\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}\\ +\|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)} + K_3\,\|\mathbf{u}(t)\|_V.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Majorons $D_1x^2 + D_2\,y\sqrt{x^2+y^2}$, pour tout x et tout y dans $\mathbb{R}_+$.
1^{er}cas $D_2 \le 2\,D_1$.
On peut vérifier que:

$$D_1x^2 + D_2\,y\sqrt{x^2+y^2} = (D_1 + \frac{D_2^2}{4\,D_1})(x^2+y^2) - \left(\sqrt{D_1}y - \frac{D_2}{2\sqrt{D_1}}\sqrt{x^2+y^2}\right)^2.$$

D'où la majoration

$$D_1x^2 + D_2\,y\sqrt{x^2+y^2} \le (D_1 + \frac{D_2^2}{4\,D_1})(x^2+y^2),$$

l'égalité étant obtenue pour $y = \frac{D_2}{\sqrt{4\,D_1^2-D_2^2}}x$ si $D_2 < 2\,D_1$ et pour $x=0$ si $D_2 = 2\,D_1$.

De plus, puisque $D_2 \le 2\,D_1$, on a $D_1 + \frac{D_2^2}{4\,D_1} \le 2\,D_1$. D'où

$$D_1\,x^2 + D_2\,y\sqrt{x^2+y^2} \le 2\,D_1(x^2+y^2). \tag{2.22}$$

$2^{ème}$cas $D_2 > 2\,D_1$.
Considérons l'identité suivante:

$$D_1\,x^2 + D_2\,y\sqrt{x^2+y^2} = D_2(x^2+y^2) - \frac{D_2}{2}\left(y - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - (\frac{D_2}{2} - D_1)x^2.$$

De là la majoration

$$D_1\,x^2 + D_2\,y\sqrt{x^2+y^2} \le D_2(x^2+y^2), \tag{2.23}$$

l'égalité étant obtenue pour $x = 0$.

Finalement, de (2.22) et (2.23), en utilisant la constante $C(\alpha_1, \alpha_2)$ définie par (2.8), on déduit

$$D_1\,x^2 + D_2\,y\sqrt{x^2+y^2} \le C(\alpha_1,\alpha_2)(x^2+y^2). \tag{2.24}$$

Appliquons (2.24) avec

$$x = \|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)} \text{ et } y = \|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

et substituons la majoration obtenue dans (2.21), on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2} \le C(\alpha_1,\alpha_2)\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2 + \|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)} + K_3\|\mathbf{u}(t)\|_V.$$

De là, en posant $y(t) = \|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}$, cela devient

$$y'(t) \le \|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)} - C(\alpha_1,\alpha_2)\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)} - y(t)\right)y(t) + K_3\|\mathbf{u}(t)\|_V$$

et (2.6) suit en substituant (2.4) dans cette inégalité.
△

Remarque 2.3 *Dans le cas, $D_2 \le 2\,D_1$, d'après l'étude ci-dessus, on peut remplacer $C(\alpha_1,\alpha_2) = 2\,D_1$ par $C(\alpha_1,\alpha_2) = D_1 + \dfrac{D_2^2}{4D_1}$. Cette valeur de $C(\alpha_1,\alpha_2)$ est optimale, mais, par contre, elle ne permet pas, à l'inverse de $C(\alpha_1,\alpha_2) = 2\,D_1$, d'écrire l'expression générale (2.8) de $C(\alpha_1,\alpha_2)$ avec le min.*

D'autre part, dans l'hypothèse plausible, mais difficile à vérifier

$$C_1(\alpha_1) \le \frac{\sqrt{6}+2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2(\sqrt{6}+2(1+2\sqrt{3}))}C_2(\alpha_1) \simeq 0.384\,C_2(\alpha_1),$$

on montre facilement que $D_2 > 2\,D_1$ et donc que

$$C(\alpha_1,\alpha_2) = D_2,$$

c'est-à-dire que l'on retrouve une expression de $C(\alpha_1,\alpha_2)$ identique à celle du cas Ω simplement connexe, donnée par (I.3.8), au remplacement de $C(\alpha_1)$ par $C_2(\alpha_1)$ près.

Comme dans le cas Ω simplement connexe, comme on peut le voir à partir de l'inégalité différentielle (2.6), l'existence globale en temps découlera de la majoration uniforme:

$$\forall t > 0,\ \|\mathbf{u}(t)\|_{V_2} \le \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right). \tag{2.25}$$

On montrera de même que chaque solution continue de (2.6) vérifie (2.25) pour des données suffisamment petites. Pour que (2.6) soit définie presque partout, on suppose que $\mathbf{f}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^+; H(\mathbf{rot};\Omega))$.

Lemme 2.4 *Soit* $\mathbf{f}$ *appartenant à* $L^1(I\!R^+; H(\mathbf{rot};\Omega))$. *Si les données satisfont*

$$\|\mathbf{u}_0\|_{V_2} + \frac{K_3}{K_1}(\|\mathbf{u}_0\|_V + \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt) + \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)}\,dt$$
$$< \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right), \tag{2.26}$$

où $C(\alpha_1,\alpha_2)$ *est définie par (2.8),* K_3 *par (2.7) et* K_1 *et* K_2 *sont définies dans le Lemme 2.1, alors toute solution continue de (2.6) avec la valeur de départ* $y(0) = \|\mathbf{u}_0\|_{V_2}$ *satisfait*

$$\forall t \geq 0,\ 0 \leq y(t) \leq \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right). \tag{2.27}$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du Lemme I.3.8. On intégre (2.6) de 0 à t en utilisant le Lemme I.3.7. Puis on pose

$$M = \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right)$$

et

$$a(s,t) = C(\alpha_1,\alpha_2)y(s) + \frac{K_2K_3}{K_1}\|\mathbf{u}(s)\|_V(1 - e^{-K_1(t-s)}).$$

Les mêmes arguments que dans le Lemme I.3.8 donnent

$$y(t) < M - \int_0^t (M - y(s))a(s,t)\,ds$$

et, par contradiction, on termine la démonstration du théorème.
$\triangle$

Nous concluons ce paragraphe en prouvant l'unicité de la solution globale du problème (I.2.17), (I.2.4), si elle existe. La démonstration est pratiquement identique à celle du cas Ω simplement connexe, Paragraphe I.4. On démontre, tout d'abord, le Lemme I.4.1 de manière identique. Ainsi, si $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont deux solutions de (I.2.17), leur différence $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ vérifie l'équation (I.4.1). Ensuite la démonstration du Théorème I.4.2 est quasiment identique à celle du cas Ω simplement connexe, il suffit de substituer $C_2(\alpha_1)$ à $C(\alpha_1)$ dans les constantes $c_1(T)$, $c_2(T)$ et $c_3(T)$, puisque, dans le cas Ω non simplement connexe, (I.2.12) est remplacée par (2.3). Ainsi (I.4.5) est verifiée par $\mathbf{u}(t)$ avec

$$c_1(T) = (2|\alpha_1+\alpha_2|\sqrt{3}+1)(\mathcal{P}^2+1)C_2(\alpha_1)C_2^{3/2}\|\mathbf{u}_2\|_{L^\infty(0,T;V_2)},$$

de même (I.4.8) et (I.4.10) avec

$$c_2(T) = C_2(\alpha_1)(C_1 + \sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2})(|\alpha_1+\alpha_2|\,\|\mathbf{u}_1\|_{L^\infty(0,T;V_2)} + |2\alpha_1+\alpha_2|\,\|\mathbf{u}_2\|_{L^\infty(0,T;V_2)})$$

et

$$c_3(T) = C_1C_2(\alpha_1)(\alpha_1\|\mathbf{u}_2\|_{L^\infty(0,T;V_2)} + 2|\alpha_1+\alpha_2|\,\|\mathbf{u}_1\|_{L^\infty(0,T;V_2)}).$$

On termine la démonstration du Théorème I.4.2 comme au Paragraphe I.4. On a donc, de nouveau, le théorème suivant dans le cas Ω non simplement connexe.

Théorème 2.5 *Le problème (I.2.17), (I.2.4) a au plus une solution dans* $L^\infty(0,T;V_2)$ *pour tout* $T > 0$.

3 Existence de la solution

Dans ce paragraphe, nous supposons que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$ et que $\mathbf{f}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^+; H(\mathbf{rot};\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$. On commence par un lemme qui généralise un résultat démontré dans le cas Ω simplement connexe à des ouverts non simplement connexes.

Lemme 3.1 *Soit Ω un domaine borné, avec une frontière Γ de classe $C^{m+2,1}$. Si $\mathbf{v}$ appartient à V_2 avec $\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})$ dans $H^m(\Omega)^3$, alors $\mathbf{v}$ appartient à $H^{m+3}(\Omega)^3$.*

Démonstration. Reprenons la démonstration du Lemme 1.10. Soit $\mathbf{v}$ dans V_2 avec $\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})$ dans $H^m(\Omega)^3$. La décomposition de Helmholtz donne

$$\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v} + \nabla(-\pi) = P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}). \tag{3.1}$$

D'une part, on a $P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)^3$, $\mathbf{rot}(P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})) = \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}) \in H^m(\Omega)^3$. D'autre part, $\operatorname{div}(P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})) = 0 \in H^m(\Omega)$ et $P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}).\mathbf{n} = 0 \in H^{m+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Alors, compte tenu de la régularité de Γ, le Théorème 1.9 implique $P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}) \in H^{m+1}(\Omega)^3$. De là, l'équation (3.1) montre que $\mathbf{v}$ est la solution d'un problème de Stokes avec un second membre $P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})$ dans $H^{m+1}(\Omega)^3$. La régularité de Γ implique que $\mathbf{v}$ appartient à $H^{m+3}(\Omega)^3$.
$\triangle$

La solution du problème (I.2.17), (I.2.4) est construite au moyen d'une discrétisation de Galerkin. L'injection compacte de V_2 dans V définit un ensemble unique de valeurs propres positives $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ et un ensemble unique de fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}_{j\geq 1}$, constituant une base orthonormale de V et une base orthogonale de V_2 telles que, pour $j \geq 1$,

$$\forall \mathbf{v} \in V_2,\ (\mathbf{w}_j, \mathbf{v})_{V_2} = \lambda_j (\mathbf{w}_j, \mathbf{v})_V, \tag{3.2}$$

le produit scalaire dans V_2 étant défini par (2.1) et celui dans V étant défini au Paragraphe I.5. Le lemme suivant est l'analogue du Lemme I.5.1.

Lemme 3.2 *En plus des hypothèses du Lemme 1.10, supposons que Γ soit de classe $C^{3,1}$. Alors les fonctions propres de (3.2) appartiennent à $H^4(\Omega)^3$.*

Démonstration. Remarquons que, grâce au Lemme 3.1, il suffit de démontrer que $\mathbf{rot}(\mathbf{w}_j - \alpha_1 \Delta \mathbf{w}_j)$ appartient à $H^1(\Omega)^3$. Pour alléger les notations, on supprime l'indice j. Développons (3.2) et appliquons la formule de Green. Alors $\mathbf{w}$ satisfait, pour tout $\mathbf{v}$ dans V_2,

$$(P(\mathbf{w} - \alpha_1 \Delta \mathbf{w}), P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})) + (\mathbf{rot}(\mathbf{w} - \alpha_1 \Delta \mathbf{w}), \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})) = \lambda(\mathbf{w}, \mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}).$$

Pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega)^3$ avec $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0$ dans Ω et $\boldsymbol{\varphi}.\mathbf{n} = 0$ sur Γ, il existe $\mathbf{v} \in V_2$ unique tel que

$$\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v} + \nabla \pi = \boldsymbol{\varphi}.$$

Notons que $\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}) = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\varphi}$ et $P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}) = P(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\varphi}$ et donc, on obtient

$$(P(\mathbf{w} - \alpha_1 \Delta \mathbf{w}), \boldsymbol{\varphi}) + (\mathbf{rot}(\mathbf{w} - \alpha_1 \Delta \mathbf{w}), \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\varphi}) = \lambda(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}).$$

Pour tout $\mathbf{g} \in H^1(\Omega)^3$, la décomposition de Helmoltz donne

$$\mathbf{g} = \boldsymbol{\varphi} + \nabla\tilde{\pi},$$

avec $\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega)^3$, $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0$ dans Ω et $\boldsymbol{\varphi}.\mathbf{n} = 0$ sur Γ. Finalement on déduit

$$\forall \mathbf{g} \in H^1(\Omega)^3,\ (\mathbf{rot}(\mathbf{w} - \alpha_1 \Delta \mathbf{w}), \mathbf{rot}\, \mathbf{g}) = (\lambda \mathbf{w} - P(\mathbf{w} - \alpha_1 \Delta \mathbf{w}), \mathbf{g}). \tag{3.3}$$

Posons

$$\mathbf{y} = \mathbf{rot}(\mathbf{w} - \alpha_1 \Delta \mathbf{w}). \tag{3.4}$$

Considérant la distribution $\mathbf{rot}\, \mathbf{y}$, grâce à (3.3), on peut écrire

$$\forall \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega)^3,\ < \mathbf{rot}\, \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi} >= (\mathbf{y}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\psi}) = (\lambda \mathbf{w} - P(\mathbf{w} - \alpha_1 \Delta \mathbf{w}), \boldsymbol{\psi}).$$

De là, $\mathbf{rot}\, \mathbf{y}$ est identifié à $\lambda \mathbf{w} - P(\mathbf{w} - \alpha_1 \Delta \mathbf{w})$. Donc

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{y} \text{ appartient à } L^2(\Omega)^3 \tag{3.5}$$

et, de nouveau avec (3.3),

$$\forall \mathbf{g} \in H^1(\Omega)^3,\ (\mathbf{rot}\, \mathbf{y}, \mathbf{g}) = (\lambda \mathbf{w} - P(\mathbf{w} - \alpha_1 \Delta \mathbf{w}), \mathbf{g}) = (\mathbf{y}, \mathbf{rot}\, \mathbf{g}).$$

Mais la formule de Green avec les rotationnels permet d'écrire

$$\forall \mathbf{g} \in H^1(\Omega)^3,\ (\mathbf{g}, \mathbf{rot}\, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{rot}\, \mathbf{g}) + < \mathbf{y} \times \mathbf{n}, \mathbf{g} >_\Gamma .$$

D'où

$$\mathbf{y} \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = \mathbf{0}. \tag{3.6}$$

Enfin, d'après la définition (3.4) de $\mathbf{y}$

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = 0. \tag{3.7}$$

Alors (3.5), (3.6) et (3.7) impliquent que $\mathbf{y} \in X_N(\Omega)$ et le Théorème 1.2 donne

$$\mathbf{y} = \mathbf{rot}(\mathbf{w} - \alpha_1 \Delta \mathbf{w}) \text{ appartient à } H^1(\Omega)^3.$$

De là, le lemme suit.
$\triangle$

Comme au Paragraphe I.5, pour tout entier m positif, nous notons V_m l'espace vectoriel engendré par les m premières fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^m$ et P_m l'opérateur de projection orthogonale sur V_m pour le produit scalaire dans V_2. Nous définissons une solution approchée du problème (I.2.17), (I.2.4) par: Chercher

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{j,m}(t) \mathbf{w}_j,$$

solution pour $1 \leq j \leq m$, de

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j) + \alpha_1(\nabla \mathbf{u}'_m(t), \nabla \mathbf{w}_j) + \nu(\nabla \mathbf{u}_m(t), \nabla \mathbf{w}_j) \\
&+(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m(t) - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta \mathbf{u}_m(t)) \times \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) \\
&+(\alpha_1 + \alpha_2)\{b(\mathbf{u}_m(t); \Delta \mathbf{w}_j, \mathbf{u}_m(t)) + 2\, b(\mathbf{u}_m(t); \Delta \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)\} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j), \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_m(0) = P_m(\mathbf{u}_0). \qquad (3.9)$$

Ainsi nous avons à résoudre un système de m équations différentielles ordinaires d'ordre un et de degré deux, avec des coefficients constants et avec une condition initiale au temps $t = 0$. Comme au Paragraphe I.5, des résultats classiques sur les EDO (*cf.* [10]) assurent qu'un tel système a une solution $\mathbf{u}_m$, unique et continue sur $[0, T^*_m]$ avec $\mathbf{u}'_m$ dans $L^\infty(0, T^*_m)$, pour un nombre $T^*_m > 0$. Nous nous proposons de démontrer que $\mathbf{u}_m(t)$ satisfait l'estimation *a priori* dans V du Paragraphe 2. En multipliant les deux membres de (3.8) par $c_{j,m}(t)$ et en sommant par rapport à j, nous obtenons, sur $[0, T^*_m]$, l'égalité

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m(t)\|_V^2 + \nu|\mathbf{u}_m(t)|^2_{H^1(\Omega)} + 3(\alpha_1 + \alpha_2)b(\mathbf{u}_m(t); \Delta \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t)). \qquad (3.10)$$

Alors la démonstration du Lemme 2.1 s'applique à $\mathbf{u}_m$ sans modification et fournit le résultat suivant.

Lemme 3.3 *La solution $\mathbf{u}_m$ du problème (3.8), (3.9) satisfait l'inégalité suivante pour tout t dans $[0, T^*_m]$:*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_m(t)\|_V \leq e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_m(0)\|_V &+ \int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}\, ds \\
&- K_2 \int_0^t e^{-K_1(t-s)} \left(\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}_m(s)\|_{V_2}\right) \|\mathbf{u}_m(s)\|_V\, ds, \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

où K_1 et K_2 sont définies dans le Lemme 2.1.

Comme au Paragraphe I.5, nous pouvons aussi déduire de l'équation (3.8) une estimation pour $\|\mathbf{u}_m(t)\|_{V_2}$. Nous utilisons la fonction vectorielle $\mathbf{F}$ définie sur V_2 par (I.5.6). Si $\mathbf{v}$ appartient à $H^4(\Omega)^3$, nous pouvons vérifier, comme au Paragraphe I.5, que $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ appartient à $H^1(\Omega)^3$. Ensuite pour chaque t, nous définissons $\mathbf{v}_m(t)$ dans V comme la solution du problème de Stokes:

$$\mathbf{v}_m(t) - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}_m(t) + \nabla q_m(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t). \qquad (3.12)$$

D'une part $\mathbf{rot}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t))$ appartient à $L^2(\Omega)^3$, donc $\mathbf{rot}(\mathbf{v}_m(t) - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}_m(t))$ appartient à $L^2(\Omega)^3$. D'autre part, puisque $\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t)$ appartient à $L^2(\Omega)^3$, la solution $\mathbf{v}_m(t)$ du problème de Stokes appartient à $H^2(\Omega)^3$. D'où, suivant la définition (1.7) de V_2, il s'ensuit que $\mathbf{v}_m$ appartient à V_2. Substituer la définition de $\mathbf{F}$ dans (3.8) donne

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j)_V + (\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j) = 0,$$

et utiliser la définition (3.12) nous permet d'écrire

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j)_V + (\mathbf{v}_m(t), \mathbf{w}_j)_V = 0.$$

En multipliant cette équation par λ_j et en utilisant (3.2) et le fait que $\mathbf{u}'_m(t)$ et $\mathbf{v}_m(t)$ appartiennent tous les deux à V_2, nous obtenons, pour tout $1 \leq j \leq m$, l'équation discrétisée:

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j)_{V_2} + (\mathbf{v}_m(t), \mathbf{w}_j)_{V_2} = 0. \tag{3.13}$$

Le théorème suivant est l'analogue du Théorème 2.2.

Théorème 3.4 *Soit Ω un domaine borné de $I\!R^3$, de frontière Γ de classe $C^{3,1}$. On suppose que $\mathbf{f}$ est dans $L^1(I\!R^+; H(\mathbf{rot}; \Omega)) \bigcap L^\infty(I\!R^+; L^2(\Omega)^3)$. Alors $y(t) = \|\mathbf{u}_m(t)\|_{V_2}$ satisfait l'inégalité différentielle dans $[0, T_m^*]$:*

$$y'(t) \leq K_3(e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_m(0)\|_V + \int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}\, ds) + \|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$$

$$-C(\alpha_1, \alpha_2)(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2)} - y(t))y(t) - K_3 K_2 \int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - y(s))\|\mathbf{u}_m(s)\|_V\, ds, \tag{3.14}$$

où $C(\alpha_1, \alpha_2)$ est définie par (2.8), K_3 par (2.7) et K_1 et K_2 sont définies dans le Lemme 2.1.

Démonstration. En multipliant les deux membres de (3.13) par $c_{j,m}(t)$ et en sommant sur j, nous obtenons

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t))_{V_2} + (\mathbf{v}_m(t), \mathbf{u}_m(t))_{V_2} = 0.$$

Poser

$$\mathbf{z}_m(t) = \mathbf{rot}(\mathbf{u}_m(t) - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}_m(t)),\ \ \mathbf{w}_m(t) = P(\mathbf{u}_m(t) - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}_m(t))$$

et utiliser le fait que

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v}_m(t) - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}_m(t)) = \mathbf{rot}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t))$$

et

$$P(\mathbf{v}_m(t) - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}_m(t)) = P(\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t))$$

donnent

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m(t)\|_{V_2}^2 + (\mathbf{rot}\ \mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)), \mathbf{z}_m(t)) + (P(\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t))), \mathbf{w}_m(t))$$
$$= (\mathbf{rot}\ \mathbf{f}(t), \mathbf{z}_m(t)) + (P(\mathbf{f}(t)), \mathbf{w}_m(t)). \tag{3.15}$$

En substituant (I.5.11) dans (3.15) et en développant $P(\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t))$ par linéarité, nous obtenons, après suppression de la variable t pour simplifier les notations:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}^2 + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}^2 + (P(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta \mathbf{u}_m) \times \mathbf{u}_m), \mathbf{w}_m)$$
$$-b(\mathbf{z}_m; \mathbf{u}, \mathbf{z}_m) + (\alpha_1 + \alpha_2)\{-b(\Delta \mathbf{u}_m; \boldsymbol{\omega}_m, \mathbf{z}_m) + b(\boldsymbol{\omega}_m; \Delta \mathbf{u}_m, \mathbf{z}_m)$$
$$+2\sum_{k=1}^{3}[b(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_m}{\partial x_k}; \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial x_k}, \mathbf{z}_m) - b(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial x_k}; \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_m}{\partial x_k}, \mathbf{z}_m) + (\nabla u_{mk} \times \nabla \Delta u_{mk}, \mathbf{z}_m)]$$
$$+2(P(\mathbf{u}_m.\nabla \Delta \mathbf{u}_m), \mathbf{w}_m) - (P(\Delta(\mathbf{u}_m.\nabla \mathbf{u}_m)), \mathbf{w}_m)\}$$
$$= (P(\mathbf{f}) + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) + (\mathbf{rot}(\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u}_m), \mathbf{z}_m). \tag{3.16}$$

On est exactement dans la même situation que dans le Théorème 2.2 et la même démonstration donne (3.14).
△

Considérons une solution de (3.14) avec la valeur initiale

$$y(0) = \|\mathbf{u}_m(0)\|_{V_2} = \|P_m(\mathbf{u}_0)\|_{V_2}.$$

Comme au Paragraphe I.5, on montre que si $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{f}$ satisfont (2.26), alors, pour m suffisamment grand, $\mathbf{u}_m(0)$ et $\mathbf{f}$ satisferont

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_m(0)\|_{V_2} + \frac{K_3}{K_1}(\|\mathbf{u}_m(0)\|_V + \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt) + \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)}\,dt \\ < \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right).\end{aligned} \tag{3.17}$$

De là, la conclusion du Lemme 2.4 implique que $T_m^* = \infty$ et que $\mathbf{u}_m(t)$ est uniformément borné dans V_2 par rapport au temps:

$$\forall t \geq 0, \|\mathbf{u}_m(t)\|_{V_2} \leq \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right). \tag{3.18}$$

Enfin, (2.3), (3.11) et (3.18) impliquent que la suite $\{\mathbf{u}_m\}_{m\geq 1}$ est bornée par rapport à m dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega)^3) \bigcap L^1(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)^3)$.

Le lemme suivant donne une borne pour $\mathbf{u}'_m(t)$.

Lemme 3.5 *Soit* $\mathbf{f}$ *élement de* $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$ *et supposons que la suite* $\{\mathbf{u}_m\}_{m\geq 1}$ *soit bornée par rapport à* m *dans* $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega)^3)$. *Alors la suite* $\{\mathbf{u}'_m\}_{m\geq 1}$ *est bornée par rapport à* m *dans* $L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$.

Démonstration. Elle est identique à celle du Lemme I.5.5.
△

Le théorème suivant récapitule les majorations obtenues pour les suites $\{\mathbf{u}_m\}$ et $\{\mathbf{u}'_m\}$.

Théorème 3.6 *Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^3$, *de frontière* Γ *de classe* $C^{3,1}$. *Soit* $\mathbf{f}$ *donné dans* $L^1(\mathbb{R}^+; H(\mathbf{rot};\Omega)) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$ *et la vitesse initiale* $\mathbf{u}_0$ *donnée dans* V_2, *suffisamment petits pour satisfaire*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_0\|_{V_2} + \frac{K_3}{K_1}(\|\mathbf{u}_0\|_V + \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt) + \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)}\,dt \\ < \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right),\end{aligned} \tag{3.19}$$

avec $C(\alpha_1, \alpha_2)$ définie par (2.8), K_1 et K_2 définies dans le Lemme 2.1 et K_3 définie par (2.7). Alors pour tout m suffisamment grand, la solution unique $\mathbf{u}_m$ de la méthode de Galerkin (3.8), (3.9) existe pour tout temps $t \geq 0$ et satisfait les bornes supérieures:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(I\!R^+; V_2)} &\leq \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right), \\
\|\mathbf{u}_m\|_{L^1(I\!R^+; H^1(\Omega)^3)} &\leq k_1, \\
\|\mathbf{u}'_m\|_{L^\infty(I\!R^+; V)} &\leq k_2,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes indépendantes de m.

On passe à la limite exactement comme au Paragraphe I.5 et on en déduit le principal théorème de ce paragraphe.

Théorème 3.7 *Sous les hypothèses du Théorème 3.6, le problème (I.2.17), (I.2.4) a une et une seule solution $\mathbf{u}$ qui existe pour tout temps $t \geq 0$. De plus, $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(I\!R^+; V_2)$, $\mathbf{u}'$ à $L^\infty(I\!R^+; V)$ et $\mathbf{u}$ est uniformément borné dans V_2 par rapport au temps:*

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(I\!R^+; V_2)} \leq \min\left(\frac{\nu}{\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2)}, \frac{K_1}{K_2}\right), \tag{3.21}$$

où $C(\alpha_1, \alpha_2)$ est définie par (2.8) et K_1 et K_2 sont définies dans le Lemme 2.1.

4 Régularité, solution classique

Comme dans le Paragraphe I.6, nous supposons que le problème (I.2.17), (I.2.4) a une solution $\mathbf{u}$ dans $L^\infty(0,T; V_2)$ avec $\mathbf{u}'$ dans $L^\infty(0,T; V)$, qui n'est pas nécessairement globale. Nous prenons encore $\mathbf{f}$ et $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ dans $L^1(0,T; H^1(\Omega)^3)$, $\mathbf{u}_0$ dans $H^4(\Omega)^3 \cap V$, $\Gamma = \bigcup_{i=0}^p \Gamma_i$ (Γ_i connexe) de classe $C^{3,1}$ et Ω domaine borné de $\mathbb{R}^3$. Pour étudier la régularité, nous aurons besoin de supposer que le domaine Ω vérifie l'Hypothèse 1.4, qui permet de "couper" convenablement Ω afin de le réduire à une region simplement connexe. Nous nous proposons de montrer que $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$ appartient à $L^\infty(0,T; H^1(\Omega)^3)$. Etant donné le Lemme 3.1, ceci implique que $\mathbf{u}$ est dans $L^\infty(0,T; H^4(\Omega)^3)$. En fait, la méthode de ce paragraphe est générale et peut être appliquée pour déduire toute régularité pour $\mathbf{u}$.

Le plan de démonstration est le même qu'au Paragraphe I.6. On commence par définir non seulement une nouvelle application $\mathbf{g}$, mais aussi une autre application $\mathbf{h}$, telles que $\mathbf{g}(\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})) + \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{rot}\,\mathbf{u}$. Ensuite, en utilisant les applications $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$, nous déduirons de (I.6.10) une équation de transport, dont $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$ est une solution dans $L^2(0,T; L^2(\Omega)^3)$. Puis on montre que cette équation a une solution dans $L^\infty(0,T; H^1(\Omega)^3)$ et on remarque que la démonstration d'unicité dans $L^2(0,T; L^2(\Omega)^3)$ dans le cas Ω simplement connexe du Paragraphe I.6.4 s'applique ici pratiquement sans changement, il suffit de remplacer $C(\alpha_1)$ par $C_2(\alpha_1)$. On déduit alors que la solution $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$ est dans $L^\infty(0,T; H^1(\Omega)^3)$, ce qui implique que $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T; H^4(\Omega)^3)$.

4.1 Une équation de transport

On utilise de nouveau l'ensemble G et la projection P_G du Paragraphe I.6.1. Soit $\mathbf{z}$ un élément de $L^2(\Omega)^3$ et soit

$$\mathbf{y_z} = P_G(\mathbf{z}).$$

Alors, d'après la définition de G, on déduit du Théorème 1.7 qu'il existe $\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z}$ unique dans $X(\Omega)$ tel que

$$\begin{gathered}\mathbf{y_z} = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z} \text{ et } \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z} = 0 \text{ dans } \Omega,\\ \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ et } <\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z}.\mathbf{n}, 1>_{\Sigma_j} = 0, \quad 1 \leq j \leq J.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Puis nous définissons $\mathbf{v_z}$ dans V comme la solution du problème de Stokes:

$$\mathbf{v_z} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v_z} + \nabla \pi_\mathbf{z} = \boldsymbol{\phi}_\mathbf{z}.$$

Nous posons

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{rot}\, \mathbf{v_z}. \tag{4.2}$$

On définit ensuite $\mathbf{h}$. Pour tout $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3$, soit $\mathbf{v_u}$ l'unique solution dans V du problème de Stokes:

$$\mathbf{v_u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v_u} + \nabla \pi_\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{J} < P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}).\mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_j} \widetilde{\nabla} q_j^T,$$

où P est la projection de Helmoltz et où les fonctions $\{\widetilde{\nabla} q_j^T\}_{j=1}^J$ forment une base de $K_T(\Omega)$ (cf. la Propriété 1.6). On définit alors

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{rot}\, \mathbf{v_u}. \tag{4.3}$$

Les lemmes qui suivent donnent des propriétés de $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$.

Lemme 4.1 *Soit* $\mathbf{g}$ *défini par (4.2) et* $\mathbf{h}$ *défini par (4.3). Si* $\mathbf{u} \in V_2$*, alors*

$$\mathbf{g}(\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})) + \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{rot}\, \mathbf{u}.$$

Démonstration. Posons

$$\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$$

et déterminons $\mathbf{g}(\mathbf{z})$. Puisque $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$ appartient à G, $\mathbf{y_z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$. D'où

$$\mathbf{rot}(P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})) = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{y_z} = \mathbf{rot}(\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z}).$$

On en déduit que $P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z}$ appartient à $K_T(\Omega)$. D'après la Propriété 1.6, cela implique

$$P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}) = \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z} + \sum_{j=1}^{J} \beta_j\, \widetilde{\nabla} q_j^T.$$

Utilisant les définitions de $\widetilde{\nabla} q_j^T$ et $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}$, on obtient

$$< P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}).\mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_j} = \beta_j, \ 1 \leq j \leq J$$

et donc

$$P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}} + \sum_{j=1}^{J} < P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}).\mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_j} \widetilde{\nabla} q_j^T.$$

Cette relation peut s'écrire

$$\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u} + \nabla(-\pi) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}} + \sum_{j=1}^{J} < P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}).\mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_j} \widetilde{\nabla} q_j^T,$$

ce qui montre que $\mathbf{u}$ est solution d'un problème de Stokes. Mais, considérant les définitions de $\mathbf{v}_{\mathbf{z}}$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{u}}$, par linéarité, on obtient que $\mathbf{v}_{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_{\mathbf{u}}$ est la solution du même problème de Stokes que $\mathbf{u}$. D'où, pour $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$,

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_{\mathbf{u}}$$

De là le lemme suit.
△

Lemme 4.2 *Soit m un entier naturel. Supposons, en plus des hypothèses du Lemme 1.10, que le domaine Ω vérifie l'Hypothèse 1.4 et que Γ soit de classe $C^{m+2,1}$. Alors l'application $\mathbf{g}$, définie sur $L^2(\Omega)^3$ par (4.2) est un opérateur continu de $H^m(\Omega)^3$ dans $H^{m+2}(\Omega)^3$.*

Démonstration. Reprenant la démonstration du Lemme I.7.1, on peut écrire

$$\|\mathbf{y}_{\mathbf{z}}\|_{H^m(\Omega)} \leq (1 + C'_m)\|\mathbf{z}\|_{H^m(\Omega)}.$$

Tenant compte de la régularité de Γ, le Lemme 1.8 et le Théorème 1.9 impliquent

$$\|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}\|_{H^{m+1}(\Omega)} \leq C''_m \|\mathbf{y}_{\mathbf{z}}\|_{H^m(\Omega)}.$$

Puis la régularité du problème de Stokes donne

$$\|\mathbf{v}_{\mathbf{z}}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq C'''_m \|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}\|_{H^{m+1}(\Omega)}.$$

Rassemblant les inégalités précédentes, on obtient

$$\|\mathbf{v}_{\mathbf{z}}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq C'''_m C''_m (1 + C'_m)\|\mathbf{z}\|_{H^m(\Omega)}.$$

Le Lemme I.3.3 permet de conclure.
△

Lemme 4.3 *Sous les hypothèses du Lemme 4.2, l'application $\mathbf{h}$,définie sur $H^2(\Omega)^3$ par (4.3) est un opérateur continu de $H^2(\Omega)^3$ dans $H^{m+2}(\Omega)^3$.*

Démonstration. Puisque $\widetilde{\nabla} q_j^T \in K_T(\Omega)$, le Théorème 1.9 avec la régularité de Γ implique $\widetilde{\nabla} q_j^T \in H^m(\Omega)^3$, pour $1 \leq j \leq J$. La régularité du problème de Stokes donne alors

$$\|\mathbf{v_u}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq C_m''' \sum_{j=1}^{J} | < P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}).\mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_j} | \, \| \, \widetilde{\nabla} q_j^T \|_{H^{m+1}(\Omega)}. \tag{4.4}$$

Majorons $| < P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}).\mathbf{n}, 1 > |$. Utilisant la Notation 1.5, pour tout $1 \leq j \leq J$, il existe $\varphi_j \in H^1(\Omega^o)$, avec Ω^o défini dans l'Hypothèse 1.4, tel que

$$[\varphi_j]_k = 0, \text{ pour } k \neq j \text{ avec } 1 \leq k \leq J \text{ et } [\varphi_j]_j = 1.$$

Soit $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$, la formule de Green donne

$$< \boldsymbol{\psi}.\mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_j} = \int_{\Omega^o} \boldsymbol{\psi}.\nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^o} (\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}) \varphi_j \, d\mathbf{x}.$$

D'où, on déduit

$$| < \boldsymbol{\psi}.\mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_j} | \leq \|\boldsymbol{\psi}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} \|\varphi_j\|_{H^1(\Omega^o)}.$$

On rappelle que l'espace $H_0(\operatorname{div};\Omega)$ est défini par

$$H_0(\operatorname{div};\Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\operatorname{div};\Omega); \mathbf{v}.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

et que $\mathcal{D}(\Omega)^3$ est dense dans $H_0(\operatorname{div};\Omega)$. On obtient donc

$$\forall \boldsymbol{\psi} \in H_0(\operatorname{div};\Omega), \; | < \boldsymbol{\psi}.\mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_j} | \leq \|\boldsymbol{\psi}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} \|\varphi_j\|_{H^1(\Omega^o)}.$$

Posons

$$\|\varphi_j\|_{H^1(\Omega^o)} = c_j.$$

Puisque $P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$ appartient à $H_0(\operatorname{div};\Omega)$, on déduit que

$$| < P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}).\mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_j} | \leq c_j \|P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}$$

et le Lemme I.3.3 donne

$$| < P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}).\mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_j} | \leq c_j (1 + \sqrt{3}\alpha_1) \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}.$$

Substituant cette inégalité dans (4.4), on obtient

$$\|\mathbf{v_u}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq C_m'''(1 + \sqrt{3}\alpha_1) (\sum_{j=1}^{J} c_j \| \, \widetilde{\nabla} q_j^T \|_{H^{m+1}(\Omega)}) \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}.$$

Cette inégalité et le Lemme I.3.3 impliquent la continuité de $\mathbf{h}$ de $H^2(\Omega)^3$ dans $H^{m+2}(\Omega)^3$. $\triangle$

Comme dans le Paragraphe I.6.2, l'équation de transport (I.2.22) est mise sous la forme (I.6.10). Alors, compte tenu du Lemme 4.1, nous sommes conduits à résoudre l'équation de transport suivante, d'inconnue $\mathbf{z}$, obtenue à partir de (I.6.10) en remplaçant $\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}$

par $\mathbf{z}$ et $\boldsymbol{\omega}$ par $\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mathbf{h}(\mathbf{u})$, où $\mathbf{u}$ est une solution du problème (I.2.17), (I.2.4):

Pour $\mathbf{u}$ donné dans $L^\infty(0,T;V_2)$, $\mathbf{u}_0$ donné dans $H^4(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ donné tel que $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartienne à $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$, chercher $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ solution de

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{z} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{z} - \frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{z}.\nabla\mathbf{u} + (\alpha_1+\alpha_2)[\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})$$
$$-\frac{1}{\alpha_1}\mathbf{z}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + 2\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}))]$$
$$= \mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u} - 2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} + (\alpha_1+\alpha_2)[-\nabla(\mathbf{rot}(\mathbf{h}(\mathbf{u})).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})$$
$$-2\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{h}(\mathbf{u}).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{h}(\mathbf{u}) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u}))], \tag{4.5}$$
$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{rot}(\mathbf{u}_0 - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_0). \tag{4.6}$$

Remarquons que, par construction de l'équation (4.5) et tenant compte du Lemme 4.1, $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ est une solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ de (4.5), (4.6).

4.2 Existence d'une solution dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et unicité de la solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ de l'équation de transport

On discrétise le problème (4.5), (4.6) de la même manière qu'au Paragraphe I.6.3 dans le cas Ω simplement connexe. Pour alléger les notations, on pose

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = -\nabla(\mathbf{rot}(\mathbf{h}(\mathbf{u})).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}) - 2\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial \mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k}). \tag{4.7}$$

Alors le problème discrétisé s'écrit:

Chercher

$$\mathbf{z}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{j,m}(t)\mathbf{w}_j,$$

solution, pour $1 \le j \le m$, de

$$(\mathbf{z}'_m(t),\mathbf{w}_j) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\mathbf{z}_m(t),\mathbf{w}_j) + b(\mathbf{u}(t);\mathbf{z}_m(t),\mathbf{w}_j)$$
$$-\frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{\alpha_1}b(\mathbf{z}_m(t);\mathbf{u}(t),\mathbf{w}_j) + (\alpha_1+\alpha_2)\{(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)),\mathbf{w}_j)$$
$$-\frac{1}{\alpha_1}(\mathbf{z}_m(t)\times\mathbf{rot}\ \mathbf{u}(t),\mathbf{w}_j) + 2\sum_{k=1}^{3}[b(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t));\frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_k},\mathbf{w}_j)$$
$$-b(\frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_k};\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)),\mathbf{w}_j) - (\frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_k}\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)),\mathbf{w}_j)]\}$$
$$= (\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t) + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t) - 2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t).\nabla\mathbf{u}(t) + (\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{r}(\mathbf{u}),\mathbf{w}_j), \tag{4.8}$$
$$\mathbf{z}_m(0) = P_m(\mathbf{z}(0)). \tag{4.9}$$

Le problème (4.8), (4.9) est un système de m équations différentielles linéaires d'ordre un avec une condition initiale au temps $t = 0$. Le facteur de $c'_{j,m}(t)$ est une matrice constante non singulière et les autres facteurs ont des coefficients variables mais continus. Donc (cf. par exemple [10]) ce système a une solution $\mathbf{z}_m(t)$, unique et continue sur tout l'intervalle $[0, T]$.

Lemme 4.4 *Supposons que* $\mathbf{u}$ *appartienne à* $L^\infty(0, T; V_2)$ *et que* $\mathbf{f}$ *soit tel que* $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ *appartienne à* $L^1(0, T; H^1(\Omega)^3)$. *Alors la solution* $\mathbf{z}_m(t)$ *de (4.8), (4.9) est bornée comme suit:*

$$\forall t \in [0, T],\ \|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq e^{K_T t}(\|\mathbf{z}_m(0)\|_{H^1(\Omega)} + C_T), \tag{4.10}$$

où K_T *et* C_T *sont deux constantes qui dépendent de* T, *mais non de* m.

Démonstration. Multipliant les deux membres de (4.8) par $\lambda_j c_{j,m}(t)$, appliquant (I.6.13) et sommant par rapport à j, on obtient, après avoir supprimé la variable t pour simplifier les notations:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)}) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\|\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)})\\
&+(\nabla(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m), \nabla\mathbf{z}_m) - \frac{3\alpha_1 + 2\alpha_2}{\alpha_1}[(\nabla(\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u}), \nabla\mathbf{z}_m) + (\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u}, \mathbf{z}_m)]\\
&+(\alpha_1 + \alpha_2)\{(\nabla(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})), \nabla\mathbf{z}_m) + (\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}), \mathbf{z}_m)\\
&-\frac{1}{\alpha_1}(\nabla(\mathbf{z}_m \times \mathbf{rot}\,\mathbf{u}), \nabla\mathbf{z}_m) + 2\sum_{k=1}^{3}[(\nabla(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}), \nabla\mathbf{z}_m)\\
&+(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}, \mathbf{z}_m) - (\nabla(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)), \nabla\mathbf{z}_m) - (\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m), \mathbf{z}_m)\\
&-(\nabla(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k} \times \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)), \nabla\mathbf{z}_m) - (\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k} \times \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m), \mathbf{z}_m)]\}\\
&= (\mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u} - 2\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} + (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{r}(\mathbf{u}), \mathbf{z}_m)_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Notons que le Lemme 4.2 implique qu'il existe des constantes C' et C'' telles que

$$\forall\mathbf{z} \in L^2(\Omega)^3,\ \|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|_{H^2(\Omega)} \leq C'\|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.12}$$

$$\forall\mathbf{z} \in H^1(\Omega)^3,\ \|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|_{H^3(\Omega)} \leq C''\|\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.13}$$

De là, nous pouvons appliquer les majorations (I.6.18)-(I.6.30) du Paragraphe I.6.3 à l'équation (4.11). Il reste donc à majorer les termes supplémentaires issus de $(\mathbf{r}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{z}_m(t))_{H^1(\Omega)}$. Dans ce but, on remarque que le Lemme 4.3 implique qu'il existe deux constantes K' et K'' telles que

$$\forall\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3,\ \|\mathbf{h}(\mathbf{u})\|_{H^2(\Omega)} \leq K'\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}, \tag{4.14}$$

$$\forall\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3,\ \|\mathbf{h}(\mathbf{u})\|_{H^3(\Omega)} \leq K''\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}. \tag{4.15}$$

Tout d'abord, nous avons les termes

$$|(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}), \mathbf{z}_m)|,\ |\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{h}(\mathbf{u}).\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}, \mathbf{z}_m)|,$$

$$|\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{h}(\mathbf{u}),\mathbf{z}_m)| \text{ et } |\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u}),\mathbf{z}_m)|.$$

Montrons qu'ils sont majorés par des expressions de la forme

$$C\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

où C dépend de C_1, C_2 et K'. On applique les mêmes méthodes de majoration qu'au Paragraphe I.6.3. Ainsi

$$\begin{aligned}|(\nabla(\mathbf{rot}(\mathbf{h}(\mathbf{u}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}),\mathbf{z}_m)| &\leq 2\|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{h}(\mathbf{u})|_{H^2(\Omega)}\\ &+2C_2^{3/2}\|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{h}(\mathbf{u})\|_{H^1(\Omega)}\|\partial^2\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

De là, (I.2.15) et (4.14) donnent

$$|(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u}(t)).\mathbf{rot}\;\mathbf{u}(t)),\mathbf{z}_m(t))| \leq 2(C_1+C_2^{\frac{3}{2}})K'\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.16}$$

De même

$$|\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{h}(\mathbf{u})(t).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}(t),\mathbf{z}_m(t))| \leq C_2^{3/2}K'\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.17}$$

$$|\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}(t).\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{h}(\mathbf{u})(t),\mathbf{z}_m(t))| \leq C_1K'\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.18}$$

$$|\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}(t)\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u})(t),\mathbf{z}_m(t))| \leq \sqrt{2}\,C_1K'\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.19}$$

Montrons que les termes qui restent à majorer, issus de $(\mathbf{r}(\mathbf{u}(t)),\mathbf{z}_m(t))_{H^1(\Omega)}$, sont bornés par des expressions du type

$$C\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}$$

où C dépend de C_1, C_2 et K''. On utilise encore des majorations analogues à celles du Paragraphe I.6.3, il suffit de remplacer $\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)$ par $\mathbf{h}(\mathbf{u}(t)$. Ainsi

$$\begin{aligned}&|(\nabla(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})),\nabla\,\mathbf{z}_m)| \leq |\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}(\|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{rot}(\partial^2\mathbf{h}(\mathbf{u}))\|_{L^2(\Omega)}\\ &+2C_2^{3/2}\|\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u}))\|_{H^1(\Omega)}\|\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{u})\|_{H^1(\Omega)}+\|\mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{rot}(\partial^2\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

Alors, de (I.2.15), du Lemme I.3.3 et de (4.15), nous déduisons

$$\begin{aligned}&|(\nabla(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u})(t).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t))),\nabla\,\mathbf{z}_m(t))|\\ &\leq 4\,K''(C_1+C_2^{3/2})\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

De même

$$\begin{aligned}&|\sum_{k=1}^{3}(\nabla(\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u}(t))}{\partial x_k}),\nabla\mathbf{z}_m(t))|\\ &\leq K''(C_1+C_2^{\frac{3}{2}})\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)},\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$|\sum_{k=1}^{3}(\nabla(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k}(t).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}(t)),\nabla \mathbf{z}_m(t))|$$
$$\leq K''(C_1+C_2^{3/2})\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}, \tag{4.22}$$

$$|\sum_{k=1}^{3}(\nabla(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}(t)\times\frac{\partial \mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k}(t)),\nabla \mathbf{z}_m(t))|$$
$$\leq \sqrt{2}\,K''(C_1+C_2^{3/2})\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.23}$$

De (4.16) et (4.20), on déduit

$$|(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u})(t).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)),\mathbf{z}_m(t))_{H^1(\Omega)}|$$
$$\leq 4(C_1+C_2^{3/2})\sqrt{K'^2+K''^2}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}.$$

On fait de même avec (4.17) et (4.21), avec (4.18) et (4.22), avec (4.19) et (4.23). Finalement nous sommes conduits à la majoration suivante:

$$|(\mathbf{r}(\mathbf{u}(t)),\mathbf{z}_m(t))_{H^1(\Omega)}|$$
$$\leq 2(4+\sqrt{2})(C_1+C_2^{3/2})\sqrt{K'^2+K''^2}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.24}$$

Rassemblant les majorations (I.6.18)-(I.6.30) et (4.24) et les substituant dans (4.11), nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\leq \|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}(D_1\|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+D_2|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)})+\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}[\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{H^1(\Omega)}+\frac{\nu}{\alpha_1}\sqrt{2}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}$$
$$+(\frac{4\sqrt{2}C_1}{\alpha_1}+2(4+\sqrt{2})\sqrt{K'^2+K''^2}(C_1+C_2^{3/2}))|\alpha_1+\alpha_2|\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}],$$

avec

$$D_1=(1+2|\alpha_1+\alpha_2|(\frac{1}{\alpha_1}+(2+\sqrt{2})C'))C_1+4|\alpha_1+\alpha_2|C'C_2^{3/2}$$

et

$$D_2=2C_1+C_2^{3/2}+|\alpha_1+\alpha_2|[\frac{2C_1+(2+\sqrt{2})C_2^{3/2}}{\alpha_1}+2(4+\sqrt{2})(C_1+C_2^{3/2})C''].$$

Utilisant la majoration

$$|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H(\Omega)}\leq\frac{1}{2}(|\mathbf{z}_m(t)|^2_{H^1(\Omega)}+\|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)})$$

et simplifiant par $\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}$, nous déduisons

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}\leq K_1\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}+\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{H^1(\Omega)}+\frac{\sqrt{2}\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}$$
$$+(\frac{4\sqrt{2}}{\alpha_1}C_1+2(4+\sqrt{2})\sqrt{K'^2+K''^2}(C_1+C_2^{3/2}))|\alpha_1+\alpha_2|\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)},$$

avec $K_1 = \max(D_1, \frac{D_2}{2}) + \frac{D_2}{2}$.

D'où (4.10) suit avec

$$K_T = K_1 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)}$$

et

$$C_T = \|\mathbf{rot}\ \mathbf{f}\|_{L^1(0,T;H^1(\Omega)^3} + T\frac{\sqrt{2}\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)}$$

$$+T(\frac{4\sqrt{2}}{\alpha_1}C_1 + 2(4+\sqrt{2})\sqrt{K'^2 + K''^2}(C_1 + C_2^{3/2}))|\alpha_1 + \alpha_2|\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)}.$$

$\triangle$

Il découle de (4.10) que la suite $\{\mathbf{z}_m\}$ est uniformément bornée par rapport à m dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$. De là, il existe une fonction $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et une sous-suite de $\{\mathbf{z}_m\}$, encore notée $\{\mathbf{z}_m\}$, telles que

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{z}_m = \mathbf{z} \quad \text{faible} * \ \text{dans } L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3).$$

Comme dans le Paragraphe I.6.3, nous pouvons passer à la limite dans (4.8), (4.9) et montrer que $\mathbf{z}$ satisfait (4.5), (4.6). Nous avons donc prouvé le théorème suivant.

Théorème 4.5 *Supposons que Ω soit un domaine borné de $I\!R^3$, vérifiant l'Hypothèse 1.4, avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Si $\mathbf{u}$ est donné dans $L^\infty(0,T;V_2)$, $\mathbf{u}_0$ dans $H^4(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ tel que $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartienne à $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$, alors le problème (4.5), (4.6) a au moins une solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$.*

Remarque 4.6 *Comme au Paragraphe I.7.1, les arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 4.5 peuvent facilement être généralisés à un quelconque $m \geq 1$. Si Γ est de classe $C^{m+2,1}$, si $\mathbf{u}$ est donné dans $L^\infty(0,T;V_2 \bigcap H^{m+2}(\Omega)^3)$, $\mathbf{u}_0$ dans $H^{m+3}(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ tel que $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartienne à $L^1(0,T;H^m(\Omega)^3)$, alors le problème (4.5), (4.6) a au moins une solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^m(\Omega)^3)$.*

La démonstration de l'unicité de la solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ du problème (4.5), (4.6) est pratiquement identique à celle du Paragraphe I.6.4. En effet, soient $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_2$ deux solutions de (4.5), (4.6). Posons $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2$. Alors $\boldsymbol{\zeta}$ satisfait l'équation (I.6.31), puisque seul le second membre est différent quand on compare (4.5) et (I.6.11). Il suffit donc de substituer $C_2(\alpha_1)$ à $C(\alpha_1)$, partout où intervient cette dernière constante.

4.3 Conclusion

Le problème (4.5), (4.6) a une solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et n'a pas plus d'une solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ (cf. Paragraphe 4.2). D'autre part, à la fin du Paragraphe 4.1, on a remarqué que $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ est solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ de (4.5), (4.6). Donc, $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ appartient à $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et, par suite du Lemme 3.1, cela implique que $\mathbf{u}$ est dans $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$. Nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème 4.7 *Supposons que Ω soit un domaine borné de $I\!R^3$, vérifiant l'Hypothèse 1.4. Supposons que la solution* $\mathbf{u}$ *du problème (I.2.1)-(I.2.5) appartienne à* $L^\infty(0,T;V_2)$*. Si la frontière* Γ *est de classe* $C^{3,1}$ *et si les données ont la régularité:*

$$\mathbf{u}_0 \in H^4(\Omega)^3 \cap V \ , \ \mathbf{f} \in L^1(0,T;H^1(\Omega)^3) \ , \ \mathbf{rot}\,\mathbf{f} \in L^1(0,T;H^1(\Omega)^3) \ , \tag{4.25}$$

alors $\mathbf{u}$ *appartient à* $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$.

Conformément à ce qui a été dit à la fin du Paragraphe 4.2, l'énoncé du Théorème 4.7 peut facilement être généralisé par induction à tout $m \geq 1$ pour donner le résultat suivant.

Théorème 4.8 *Soient un entier $m \geq 1$ et Ω un domaine borné de R^3, vérifiant l'Hypothèse 1.4 avec une frontière Γ de classe $C^{m+2,1}$. Supposons que la solution* $\mathbf{u}$ *du problème (I.2.1)-(I.2.5) appartienne à* $L^\infty(0,T;V_2)$*. Si les données ont la régularité:*

$$\mathbf{u}_0 \in H^{m+3}(\Omega)^3 \cap V \ , \ \mathbf{f} \in L^1(0,T;H^m(\Omega)^3) \ , \ \mathbf{rot}\,\mathbf{f} \in L^1(0,T;H^m(\Omega)^3),$$

alors $\mathbf{u}$ *appartient à* $L^\infty(O,T;H^{m+3}(\Omega)^3)$.

Démonstration. Comme dans la démonstration du Théorème I.7.2, si nous prouvons l'existence de solution dans $L^\infty(0,T;H^m(\Omega)^3)$ du problème (4.5), (4.6), alors cette solution est $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ et appartient à $L^\infty(0,T;H^m(\Omega)^3)$. De là, le Lemme 3.1 implique que $\mathbf{u}$ est dans $L^\infty(0,T;H^{m+3}(\Omega)^3)$. Il nous reste donc à prouver cette existence.

On définit le même problème approché (4.8), (4.9) avec $\mathbf{w}_j$ fonction propre du problème

$$\forall \mathbf{v} \in H^m(\Omega)^3,\ ((\mathbf{w}_j,\mathbf{v}))_m = \lambda_j(\mathbf{w}_j,\mathbf{v}), \tag{4.26}$$

où $((\ ,\ ))_m$ représente le produit scalaire dans $H^m(\Omega)^3$. Par rapport à la démonstration du Théorème I.7.2, il y a en plus des termes supplémentaires à majorer, issus de $((\mathbf{r}(\mathbf{u}),\mathbf{z}_p))_m$. Notons que le Lemme 4.3 implique que, si Γ est de classe $C^{m+2,1}$, alors il existe une constante K_m telle que

$$\forall \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3,\ \|\mathbf{h}(\mathbf{u})\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq K_m\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}. \tag{4.27}$$

A l'aide de cette relation, on majore les termes de $((\mathbf{r}(\mathbf{u}),\mathbf{z}_p))_m$ de la même manière que celle utilisée, au Paragraphe I.7.1, pour les termes contenant $\mathbf{g}(\mathbf{z}_p)$. Considérons, par exemple $((\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla(\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k}),\mathbf{z}_p))_m$,

$$\begin{aligned}|((\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla(\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k}),\mathbf{z}_p))_m| &\leq |\sum_{|\alpha|=m}(\partial^\alpha(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}).\nabla(\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k}),\partial^\alpha\mathbf{z}_p)| \\ &+|\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq m\\|\alpha|\leq m-1}} C_{\alpha,\beta}(\partial^\alpha(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}).\nabla(\partial^\beta(\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k})),\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p)|.\end{aligned}$$

D'une part, utilisant (4.27), on obtient

$$\begin{aligned}&|(\partial^\alpha(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}).\nabla(\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k}),\partial^\alpha\mathbf{z}_p)| \leq \|\partial^\alpha(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k})\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla(\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k})\|_{L^4(\Omega)}\|\partial^\alpha\mathbf{z}_p\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_2^{3/2}\|\mathbf{u}\|_{H^{m+2}(\Omega)}\|\mathbf{h}(u)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_p\|_{H^m(\Omega)} \leq K_1C_2^{3/2}\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}\|_{H^{m+2}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p\|_{H^m(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'autre part, grâce à $|\alpha| \leq m-1$, on a

$$\begin{aligned}
|(\partial^{\alpha}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}).\nabla\partial^{\beta}(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k}), \partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p)| &\leq \|\partial^{\alpha}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k})\|_{L^{\infty}(\Omega)}\|\nabla\partial^{\beta}(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k})\|_{L^2(\Omega)}\|\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq K_m C_1\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}\|_{H^{m+2}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p\|_{H^m(\Omega)}.
\end{aligned}$$

De ces deux types de majorations, on déduit

$$|\sum_{k=1}^{3}((\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}(t).\nabla(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial x_k}(t)), \mathbf{z}_p))_m| \leq C\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^{m+2}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p(t)\|_{H^m(\Omega)}, \tag{4.28}$$

où C dépend de C_1, C_2, K_m et m.

Les autres termes venant de $((\mathbf{r}(\mathbf{u}), \mathbf{z}_p), \mathbf{z}_p))_m$ se majorent de manière similaire. On montre alors facilement que la suite $\{\mathbf{z}_p\}$ est uniformément bornée par rapport à p dans $L^{\infty}(0,T;H^m(\Omega)^3)$. On en déduit l'existence d'une solution dans $L^{\infty}(O,T;H^m(\Omega)^3)$ du problème (4.5), (4.6). Comme on l'a expliqué précédemment, cela termine la démonstration du théorème.
$\triangle$

Les autres résultats du Paragraphe I.7 sont encore exacts dans le cas où Ω n'est pas simplement connexe, mais vérifie l'Hypothèse 1.4. Les démonstrations sont identiques. Donnons ces résultats pour finir.

Lemme 4.9 *Sous les hypothèses du Théorème 3.6, le problème (I.1.9), (I.2.2)-(I.2.5) a une unique solution* $\mathbf{u}$ *dans* $L^{\infty}(\mathbb{R}^+;V_2)$ *et* $\tilde{p}$ *dans* $L^{\infty}(\mathbb{R}^+;H^1(\Omega)/\mathbb{R})$. *De plus* $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ *appartient à* $L^{\infty}(\mathbb{R}^+;H^2(\Omega)^3)$.

Le dernier théorème donne l'existence d'une solution au sens classique de l'équation (I.1.9).

Théorème 4.10 *Soit* $T > 0$. *Soit* Ω *domaine borné de* $\mathbb{R}^3$, *vérifiant l'Hypothèse 1.4. Supposons que* $\mathbf{u}$ *solution de (I.2.1), (I.2.4) appartienne à* $L^{\infty}(0,T;V_2)$. *Si la frontière* Γ *est de classe* $C^{6,1}$ *et si les données ont la régularité suivante:*

$$\mathbf{u}_0 \in H^7(\Omega)^3 \cap V \ , \ \mathbf{f} \in L^{\infty}(0,T;H^4(\Omega)^3),$$
$$\mathbf{rot}\,\mathbf{f} \in L^{\infty}(0,T;H^4(\Omega)^3) \ , \ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \in L^{\infty}(0,T;H^3(\Omega)^3),$$

alors le problème (I.1.9), (I.2.2)-(I.2.5) admet une solution unique $(\mathbf{u},\tilde{p})$ *dans l'ensemble* $C^1([0,T];C^3(\overline{\Omega})^3) \times C([0,T];C^2(\overline{\Omega})/\mathbb{R})$.

Deuxième partie

Fluide de grade deux : cas stationnaire avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$.

Chapitre III
Fluide de grade deux dans le cas stationnaire avec Ω simplement connexe

1 Introduction

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$, borné et simplement connexe, de frontière Γ qui est au moins de classe $C^{2,1}$. Nous notons $\mathbf{n}$ le vecteur normal unitaire à Γ, dirigé vers l'extérieur de Ω. On se place sous l'hypothèse

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Sous cette hypothèse, si nous annulons les dérivées par rapport au temps dans (I.2.1) (cas stationnaire), on est conduit au système d'équations suivant, que nous nous proposons de résoudre:

Chercher une fonction à valeurs vectorielles $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et une fonction scalaire p définies dans Ω, solution de :

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \tag{1.1}$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \qquad \text{dans } \ \Omega, \tag{1.2}$$

avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{sur } \ \Gamma. \tag{1.3}$$

Rappelons (cf. Paragraphe I.2) la définition suivante

$$V_2 = \{\mathbf{v} \in V; \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)^3\} \tag{1.4}$$

et le résultat suivant: l'espace V_2 est inclus dans $H^3(\Omega)^3$ et il existe une constante $C(\alpha_1)$ telle que

$$\forall \mathbf{v} \in V_2, \ \|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)} \leq C(\alpha_1)\|\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.5}$$

Comme au Chapitre I, V_2 est muni du produit scalaire

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{V_2} = (\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}), \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})) \tag{1.6}$$

et de la norme associée : $\|\mathbf{v}\|_{V_2} = (\mathbf{v},\mathbf{v})_{V_2}^{1/2}$. De là

$$\forall \mathbf{v} \in V_2,\ \|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)} \leq C(\alpha_1)\|\mathbf{v}\|_{V_2}. \tag{1.7}$$

L'espace V est muni du produit scalaire

$$(\mathbf{w},\mathbf{v})_V = (\mathbf{w},\mathbf{v}) + \alpha_1(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}). \tag{1.8}$$

Enfin, on rappelle le lemme classique suivant, qui est une variante du théorème de Brouwer.

Lemme 1.1 *Soient un entier $m \geq 1$ et P une application continue de $I\!R^m$ dans $I\!R^m$. On suppose qu'il existe un réel $\rho > 0$ tel que,* pour tout $\boldsymbol{\xi}$ dans $I\!R^m$, *avec $|\boldsymbol{\xi}| = \rho$, on ait $P(\boldsymbol{\xi}).\boldsymbol{\xi} \geq 0$. Alors il existe $\boldsymbol{\xi}^*$ appartenant à $I\!R^m$, avec $|\boldsymbol{\xi}^*| \leq \rho$, tel que $P(\boldsymbol{\xi}^*) = \mathbf{0}$.*

Le plan du chapitre sera le suivant. Dans le Paragraphe 2, nous définissons un problème approché et nous démontrons l'existence d'une solution, ainsi qu'une dépendance continue par rapport aux données quand $\mathbf{u}_m$ est assez petit dans V_2. Le Paragraphe 3 est consacré à la majoration de la solution approchée dans V_2. L'existence de solution, l'unicité, ainsi que la dépendance continue par rapport aux données, sont démontrées au Paragraphe 3, pour $\mathbf{f}$ assez petit dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$. Enfin, dans le dernier paragraphe, nous nous intéressons à la régularité de la solution.

2 Définition d'un problème approché, existence et dépendance continue des solutions par rapport aux données

Dans ce paragraphe, nous supposons que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, simplement connexe, avec une frontière Γ de classe $C^{2,1}$ et que $\mathbf{f}$ appartient à $L^2(\Omega)^3$.

La solution du problème (1.1)-(1.3) est construite au moyen d'une discrétisation de Galerkin. On utilise la suite de fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}$ de V_2, définie dans le Paragraphe I.5 par

$$(\mathbf{w}_j,\mathbf{v})_{V_2} = \lambda_j(\mathbf{w}_j,\mathbf{v})_V,\ \forall \mathbf{v} \in V_2 \tag{2.1}$$

avec

$$0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k < \ldots \to +\infty,$$

où $\{\lambda_j\}$ est la suite de valeurs propres associées à la suite de fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}$. Les fonctions $\mathbf{w}_j$ forment une base orthonormale dans V et une base orthogonale dans V_2. Cet ensemble de fonctions sera utilisé comme base spéciale dans la méthode de Galerkin-Faedo. Pour tout entier m positif, nous notons V_m l'espace vectoriel engendré par les m premières fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^m$. Nous définissons une solution approchée du problème (1.1)-(1.3) par:

Chercher

$$\mathbf{u}_m = \sum_{j=1}^{m} c_{j,m} \mathbf{w}_j,$$

solution pour $1 \le j \le m$, de

$$\nu(\nabla \mathbf{u}_m, \nabla \mathbf{w}_j) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}_m) \times \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_j). \tag{2.2}$$

Lemme 2.1 *Supposons que Ω soit un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, simplement connexe, avec une frontière Γ de classe $C^{2,1}$ et que $\mathbf{f}$ appartienne à $L^2(\Omega)^3$. Alors le problème (2.2) admet une solution $\mathbf{u}_m$ dans V_2, qui vérifie*

$$|\mathbf{u}_m|_{H^1(\Omega)} \le \frac{\mathcal{P}}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.3}$$

Démonstration. On construit une application P de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ de la manière suivante: pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$, on pose

$$\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \mathbf{w}_i.$$

On définit alors $P(\boldsymbol{\xi})$ par ses composantes, pour $1 \le i \le m$,

$$(P(\boldsymbol{\xi}))_i = \nu(\nabla \mathbf{u}_m, \nabla \mathbf{w}_i) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}_m) \times \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_i) - (\mathbf{f}, \mathbf{w}_i). \tag{2.4}$$

1) On montre tout d'abord que P est continu de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$. Il suffit de remarquer que $(P(\boldsymbol{\xi}))_i$ est un polynôme à m variables de degré deux, donc $\boldsymbol{\xi} \to (P(\boldsymbol{\xi}))_i$ est continu de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$.
2) On montre ensuite que, pour $|\boldsymbol{\xi}| = \rho$ assez grand, $(P(\boldsymbol{\xi}).\boldsymbol{\xi}) \ge 0$. En effet

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\xi}).\boldsymbol{\xi} &= \nu|\mathbf{u}_m|^2_{H^1(\Omega)} + (\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}_m) \times \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) - (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m) \\ &= \nu|\mathbf{u}_m|^2_{H^1(\Omega)} - (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m), \end{aligned}$$

car $(\mathbf{w} \times \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$. Mais, grâce à Poincaré,

$$|(\mathbf{f}, \mathbf{u}_m)| \le \mathcal{P} |\mathbf{u}_m|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous en déduisons l'inégalité

$$P(\boldsymbol{\xi}).\boldsymbol{\xi} \ge |\mathbf{u}_m|_{H^1(\Omega)} (\nu |\mathbf{u}_m|_{H^1(\Omega)} - \mathcal{P} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}). \tag{2.5}$$

D'autre part, si $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$,

$$|\mathbf{u}_m|_{H^1(\Omega)} = |\boldsymbol{\xi}| \, \| \sum_{i=1}^{m} \frac{\xi_i}{|\boldsymbol{\xi}|} \nabla \, \mathbf{w}_i \|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.6}$$

L'application

$$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m \to \| \sum_{i=1}^{m} \theta_i \nabla \, \mathbf{w}_i \|_{L^2(\Omega)}$$

est continue sur le compact $\{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m; |\boldsymbol{\theta}| = 1\}$, elle atteint donc son minimun C_0. Mais $C_0 > 0$, car les vecteurs $\mathbf{w}_i$, $1 \leq i \leq m$, sont indépendants. De là, l'égalité (2.6) donne

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m, \ |\mathbf{u}_m|_{H^1(\Omega)} \geq |\boldsymbol{\xi}| \, C_0.$$

Posons $\rho = \dfrac{\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}}{\nu C_0}$. Alors pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$ tel que $|\boldsymbol{\xi}| = \rho$, l'inégalité précédente implique

$$|\mathbf{u}_m|_{H^1(\Omega)} \geq \frac{\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}}{\nu}.$$

Du résultat précédent et de (2.5), on déduit que

$$P(\boldsymbol{\xi}).\boldsymbol{\xi} \geq 0,$$

pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$ tel que $|\boldsymbol{\xi}| = \rho = \dfrac{\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}}{\nu C_0}$. L'application P vérifie donc les hypothèses du Lemme 1.1. D'où, il existe $\boldsymbol{\xi}^* \in \mathbb{R}^m$ avec $|\boldsymbol{\xi}^*| \leq \dfrac{\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}}{\nu C_0}$, tel que

$$P(\boldsymbol{\xi}^*) = 0.$$

Par construction de P, cela implique l'existence d'une solution

$$\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^* \mathbf{w}_i$$

du problème approché (2.2).

Enfin, en multipliant les deux membres de (2.2) par $c_{j,m}$ et en sommant par rapport à j, tenant compte de la relation $(\mathbf{w} \times \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$, nous obtenons l'égalité

$$\nu|\mathbf{u}_m|^2_{H^1(\Omega)} = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m).$$

Utilisant l'inégalité de Poincaré, on déduit que la solution $\mathbf{u}_m$ précédente vérifie l'inégalité (2.3).
$\triangle$

Soit $\mathbf{u}_m$ une solution du problème approché (2.2). Nous allons montrer que, si $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$ est assez petit, cette solution dépend continuement de la donnée $\mathbf{f}$. Précisément, nous établissons le Lemme suivant.

Lemme 2.2 *Supposons que Ω soit un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, simplement connexe, avec une frontière Γ de classe $C^{2,1}$. Pour $i = 1, 2$, on note $\mathbf{u}_{m,i}$ une solution du problème (2.2) avec $\mathbf{f}_i \in L^2(\Omega)^3$ comme second membre. Si $\mathbf{u}_{m,2}$ vérifie*

$$\|\mathbf{u}_{m,2}\|_{V_2} \leq \rho, \ \text{avec } \rho < \frac{\nu}{K(\alpha_1)}, \tag{2.7}$$

où

$$K(\alpha_1) = (2\alpha_1 C_1 + (\alpha_1 + 1)\sqrt{\mathcal{P}^2 + 1}C_2^{3/2})C(\alpha_1), \tag{2.8}$$

alors on a l'inégalité

$$|\mathbf{u}_{m,2} - \mathbf{u}_{m,1}|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\mathcal{P}}{\nu - K(\alpha_1)\rho}\|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.9}$$

Démonstration. Pour $i = 1, 2$ et pour $j = 1, 2, \ldots, m$, nous avons

$$\nu(\nabla \mathbf{u}_{m,i}, \nabla \mathbf{w}_j) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u}_{m,i} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}_{m,i}) \times \mathbf{u}_{m,i}, \mathbf{w}_j) = (\mathbf{f}_i, \mathbf{w}_j).$$

Alors $\mathbf{U}_m = \mathbf{u}_{m,2} - \mathbf{u}_{m,1}$ satisfait l'égalité, pour $j = 1, 2, \ldots, m$,

$$\begin{gathered}\nu(\nabla \mathbf{U}_m, \nabla \mathbf{w}_j) + (\mathbf{rot}(\mathbf{U}_m - \alpha_1 \Delta \mathbf{U}_m) \times \mathbf{u}_{m,2}, \mathbf{w}_j) \\ +(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_{m,1} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}_{m,1}) \times \mathbf{U}_m, \mathbf{w}_j) = (\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1, \mathbf{w}_j).\end{gathered}$$

Mais $\mathbf{U}_m \in V_m$ et $(\mathbf{w} \times \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$, d'où $\mathbf{U}_m$ vérifie l'égalité

$$\nu|\mathbf{U}_m|^2_{H^1(\Omega)} + (\mathbf{rot}(\mathbf{U}_m - \alpha_1 \Delta \mathbf{U}_m) \times \mathbf{u}_{m,2}, \mathbf{U}_m) = (\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1, \mathbf{U}_m). \tag{2.10}$$

La relation (I.4.3) donne

$$\begin{aligned}(\mathbf{rot}(\mathbf{U}_m - \alpha_1 \Delta \mathbf{U}_m) \times \mathbf{u}_{m,2}, \mathbf{U}_m) &= -b(\mathbf{U}_m; \mathbf{U}_m, \mathbf{u}_{m,2}) \\ &+\alpha_1(b(\mathbf{U}_m; \Delta \mathbf{U}_m, \mathbf{u}_{m,2}) - b(\mathbf{u}_{m,2}; \Delta \mathbf{U}_m, \mathbf{U}_m)).\end{aligned} \tag{2.11}$$

D'après le Lemme I.3.5

$$|b(\mathbf{U}_m; \mathbf{U}_m, \mathbf{u}_{m,2})| \leq \|\mathbf{U}_m\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{u}_{m,2}\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \mathbf{U}_m\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors (I.2.16), (1.7) et (I.4.4) impliquent

$$|b(\mathbf{U}_m; \mathbf{U}_m, \mathbf{u}_{m,2})| \leq \sqrt{\mathcal{P}^2 + 1} C_2^{3/2} C(\alpha_1) \|\mathbf{u}_{m,2}\|_{V_2} |\mathbf{U}_m|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Ensuite (I.4.7) donne

$$|b(\mathbf{U}_m; \Delta \mathbf{U}_m, \mathbf{u}_{m,2})| \leq \|\nabla \mathbf{u}_{m,2}\|_{L^\infty(\Omega)} |\mathbf{U}_m|^2_{H^1(\Omega)} + C_2^{3/2} \|\mathbf{U}_m\|_{H^1(\Omega)} \|\partial^2 \mathbf{u}_{m,2}\|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{U}_m|_{H^1(\Omega)}.$$

Alors (I.2.15), (1.7) et (I.4.4) impliquent

$$|b(\mathbf{U}_m; \Delta \mathbf{U}_m, \mathbf{u}_{m,2})| \leq (C_1 + \sqrt{\mathcal{P}^2 + 1} C_2^{3/2}) C(\alpha_1) \|\mathbf{u}_{m,2}\|_{V_2} |\mathbf{U}_m|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{2.13}$$

Enfin (I.4.9) donne

$$|b(\mathbf{u}_{m,2}; \Delta \mathbf{U}_m, \mathbf{U}_m)| \leq \|\nabla \mathbf{u}_{m,2}\|_{L^\infty(\Omega)} |\mathbf{U}_m|^2_{H^1(\Omega)},$$

puis de (I.2.15) et (1.7), nous déduisons

$$|b(\mathbf{u}_{m,2}; \Delta \mathbf{U}_m, \mathbf{U}_m)| \leq C_1 C(\alpha_1) \|\mathbf{u}_{m,2}\|_{V_2} |\mathbf{U}_m|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{2.14}$$

Rassemblant les inégalités (2.12), (2.13) et (2.14) et les substituant dans (2.11), on a

$$|(\mathbf{rot}(\mathbf{U}_m - \alpha_1 \Delta \mathbf{U}_m) \times \mathbf{u}_{m,2}, \mathbf{U}_m)| \leq K(\alpha_1) \|\mathbf{u}_{m,2}\|_{V_2} |\mathbf{U}_m|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{2.15}$$

où $K(\alpha_1)$ est donnée par (2.8). En utilisant cette majoration dans (2.10) et l'inégalité de Poincaré, nous obtenons

$$\nu|\mathbf{U}_m|^2_{H^1(\Omega)} \leq K(\alpha_1) \|\mathbf{u}_{m,2}\|_{V_2} |\mathbf{U}_m|^2_{H^1(\Omega)} + \mathcal{P} \|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|_{L^2(\Omega)} |\mathbf{U}_m|_{H^1(\Omega)}.$$

Finalement (2.9) se déduit de l'hypothèse (2.7).
$\triangle$

3 Majoration dans V_2 d'une solution du problème approché

Dans ce paragraphe, nous supposons que la frontière Γ de Ω est de classe $C^{3,1}$ et que $\mathbf{f}$ appartient à $H(\mathbf{rot};\Omega)$.

3.1 Inéquation dans V_2 pour une solution du problème approché

Pour tout $\mathbf{u}$ appartenant à $H^4(\Omega)^3$, on pose

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = -\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u}. \tag{3.1}$$

Pour $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{F}(\mathbf{u}) = -\nu\Delta\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) \times \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i} + \mathbf{rot}(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i} - \alpha_1\Delta(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i})) \times \mathbf{u}.$$

L'hypothèse $\mathbf{u} \in H^4(\Omega)^3$, avec les théorèmes d'inclusion de Sobolev, implique que $\mathbf{u}$ et $\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i}$ sont dans $L^\infty(\Omega)^3$. Nous en déduisons que $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ appartient à $H^1(\Omega)^3$.

Soit $\mathbf{u}_m$ une solution du problème (2.2). En raison du Lemme I.5.1, $\mathbf{F}(\mathbf{u}_m)$ appartient à $H^1(\Omega)^3$. Ensuite, nous définissons $\mathbf{v}_m$ dans V comme la solution du problème de Stokes:

$$\mathbf{v}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{v}_m + \nabla q_m = \mathbf{F}(\mathbf{u}_m) - \mathbf{f}. \tag{3.2}$$

Puisque $\mathbf{rot}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_m) - \mathbf{f}) = \mathbf{rot}(\mathbf{v}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{v}_m)$ appartient à $L^2(\Omega)^3$, il s'ensuit, grâce au Lemme I.2.1, que $\mathbf{v}_m$ appartient à V_2. Si $\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i\mathbf{w}_i$ est une solution de (2.2), on obtient

$$\forall i = 1, 2, \ldots, m,\ (\mathbf{F}(\mathbf{u}_m) - \mathbf{f}, \mathbf{w}_i) = 0.$$

Utilisant la définition (1.8) et (3.2), on déduit

$$(\mathbf{v}_m, \mathbf{w}_i)_V = 0.$$

Puis, multipliant cette équation par λ_i, grâce à (2.1), cela donne

$$(\mathbf{v}_m, \mathbf{w}_i)_{V_2} = 0.$$

Enfin, multipliant cette dernière égalité par ξ_i et sommant sur i, nous obtenons

$$(\mathbf{v}_m, \mathbf{u}_m)_{V_2} = 0,$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$(\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{u}_m), \mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m)) = (\mathbf{rot}\,\mathbf{f}, \mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m)). \tag{3.3}$$

Posant

$$\boldsymbol{\omega}_m = \mathbf{rot}\,\mathbf{u}_m,$$

l'identité

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w}.\nabla\mathbf{v} - \mathbf{v}.\nabla\mathbf{w} + (\operatorname{div}\mathbf{w})\mathbf{v} - (\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{w}$$

donne

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{u}_m) = -\nu\Delta\boldsymbol{\omega}_m + \mathbf{u}_m.\nabla(\boldsymbol{\omega}_m - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m) - (\boldsymbol{\omega}_m - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m).\nabla\,\mathbf{u}_m.$$

Substituant cette égalité dans (3.3) et utilisant l'antisymétrie de l'application b, définie au Paragraphe I.2, nous obtenons

$$\frac{\nu}{\alpha_1}\|\boldsymbol{\omega}_m - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{\nu}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega}_m, \boldsymbol{\omega}_m - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m)$$
$$+b(\boldsymbol{\omega}_m - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m; \mathbf{u}_m, \boldsymbol{\omega}_m - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m) + (\mathbf{rot}\,\mathbf{f}, \boldsymbol{\omega}_m - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m). \tag{3.4}$$

Majorons les termes du deuxième membre. Le Lemme I.3.5, (1.7) et (I.2.15) donnent

$$|b(\boldsymbol{\omega}_m - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m; \mathbf{u}_m, \boldsymbol{\omega}_m - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m)| \le C_1 C(\alpha_1)\|\mathbf{u}_m\|^3_{V_2}. \tag{3.5}$$

Du Lemme I.3.3 et de (2.3), on déduit

$$|(\boldsymbol{\omega}_m, \boldsymbol{\omega}_m - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m)| \le \frac{\sqrt{2}}{\nu}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}. \tag{3.6}$$

Substituant les inégalités (3.5) et (3.6) et simplifiant par $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} = \|\boldsymbol{\omega}_m - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m\|_{L^2(\Omega)}$, nous obtenons

$$\frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \le \frac{\sqrt{2}}{\alpha_1}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + C_1 C(\alpha_1)\|\mathbf{u}_m\|^2_{V_2}.$$

On pose pour simplifier

$$|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_1}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.7}$$

Alors, l'inégalité précédente peut se mettre sous la forme

$$C_1 C(\alpha_1)\|\mathbf{u}_m\|^2_{V_2} - \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} + |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \ge 0. \tag{3.8}$$

Cette inégalité est vérifiée par toute solution $\mathbf{u}_m$ du problème (2.2). Grâce à elle, nous allons montrer que, pour un $\mathbf{f}$ assez petit dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$ appartient à une réunion de deux intervalles.

Lemme 3.1 *Soit Ω un ouvert de $I\!R^3$, borné et simplement connexe avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Soit $\mathbf{f}$ donné dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire*

$$|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < \frac{\nu^2}{4C_1\alpha_1^2 C(\alpha_1)}, \tag{3.9}$$

où $|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$ est défini par (3.7). Alors toute solution $\mathbf{u}_m$ du problème (2.2) est telle que

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \text{ appartient à } [0, \rho_1(\mathbf{f})] \cup [\rho_2(\mathbf{f}), +\infty[, \tag{3.10}$$

où

$$\rho_1(\mathbf{f}) = \frac{\frac{\nu}{\alpha_1} - \sqrt{\frac{\nu^2}{\alpha_1^2} - 4C_1C(\alpha_1)|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}}{2C_1C(\alpha_1)}$$

et

$$\rho_2(\mathbf{f}) = \frac{\frac{\nu}{\alpha_1} + \sqrt{\frac{\nu^2}{\alpha_1^2} - 4C_1C(\alpha_1)|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}}{2C_1C(\alpha_1)}.$$

Démonstration. Soit la fonction trinôme

$$g(X) = C_1C(\alpha_1)X^2 - \frac{\nu}{\alpha_1}X + |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$$

et soit son discriminant

$$\Delta(\mathbf{f}) = \frac{\nu^2}{\alpha_1^2} - 4C_1C(\alpha_1)|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}. \tag{3.11}$$

Sous l'hypothèse $\Delta(\mathbf{f}) > 0$ et $X \geq 0$, le théorème du signe du trinôme donne

$$g(X) \geq 0 \text{ si et seulement si } X \in [0, \rho_1(\mathbf{f})] \cup [\rho_2(\mathbf{f}), +\infty[,$$

où les racines du trinôme $\rho_1(\mathbf{f})$ et $\rho_2(\mathbf{f})$ sont données dans le Lemme 3.1. Si on écrit l'inégalité (3.8) sous la forme $g(\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}) \geq 0$ et si on remarque que la condition $\Delta(\mathbf{f}) > 0$ est équivalente à (3.9), (3.10) suit.
$\triangle$

La suite du paragraphe sera consacrée à montrer que, pour $\mathbf{f}$ suffisamment petit dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, l'alternative $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \geq \rho_2(\mathbf{f})$ n'est jamais vérifiée et que, par conséquent, $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \rho_1(\mathbf{f})$.

3.2 Majoration de $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$ pour f dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$ assez petit

On commence par deux résultats préliminaires

Lemme 3.2 *Soit $\mathbf{v}_m$ appartenant à V_m. Alors on a*

$$\|\mathbf{v}_m\|_{V_2} \leq \sqrt{(\mathcal{P}^2 + \alpha_1)\lambda_m}|\mathbf{v}_m|_{H^1(\Omega)}, \tag{3.12}$$

où λ_m est la valeur propre associée à la fonction propre $\mathbf{w}_m$ du problème spectral (2.1).

Démonstration. La base $\{\mathbf{w}_j\}_{j\geq 1}$ est orthogonale dans V_2 et orthonormale dans V. D'où, si $\mathbf{v}_m = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \mathbf{w}_j$, grâce à la relation (2.1),

$$\|\mathbf{v}_m\|_{V_2}^2 = \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2 (\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j)_{V_2} = \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2 \lambda_j.$$

Puisque la suite $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ est croissante, nous déduisons

$$\|\mathbf{v}_m\|_{V_2}^2 \leq \lambda_m \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2. \tag{3.13}$$

D'autre part,

$$\|\mathbf{v}_m\|_V^2 = \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2.$$

Substituant cette égalité dans (3.13), nous obtenons

$$\|\mathbf{v}_m\|_{V_2}^2 \leq \lambda_m \|\mathbf{v}_m\|_V^2.$$

De là, (3.12) suit, grâce à l'inégalité de Poincaré.
$\triangle$

Lemme 3.3 *Soit $K(\alpha_1)$ définie par (2.8), $|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$ par (3.7) et $\rho_1(\mathbf{f})$ défini dans le Lemme 3.1. Si on a*

$$|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < \frac{\nu^2}{2\alpha_1 K(\alpha_1)}, \tag{3.14}$$

alors $|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$, $\rho_1(\mathbf{f})$ et $\dfrac{1}{\nu - K(\alpha_1)\rho_1(\mathbf{f})}$ satisfont les inégalités suivantes:

$$|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < \frac{\nu^2}{4C_1\alpha_1^2 C(\alpha_1)},\ \rho_1(\mathbf{f}) \leq \frac{\nu}{K(\alpha_1)(1+L(\alpha_1))} < \frac{\nu}{K(\alpha_1)}$$
$$\text{et } \frac{1}{\nu - K(\alpha_1)\rho_1(\mathbf{f})} \leq \frac{2}{\nu L(\alpha_1)},$$

où

$$L(\alpha_1) = \sqrt{\frac{\sqrt{\mathcal{P}^2+1}\,C_2^{3/2}(\alpha_1+1)C(\alpha_1)}{K(\alpha_1)}}. \tag{3.15}$$

Démonstration. Considérant l'expression (2.8) de $K(\alpha_1)$, clairement

$$K(\alpha_1) \geq 2\alpha_1 C_1 C(\alpha_1).$$

Substituant cette inégalité dans (3.14), nous obtenons

$$|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < \frac{\nu^2}{4C_1\alpha_1^2 C(\alpha_1)}.$$

En utilisant la forme conjuguée du numérateur de $\rho_1(\mathbf{f})$ et en simplifiant, on déduit

$$\rho_1(\mathbf{f}) = \frac{2|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}{\frac{\nu}{\alpha_1} + \sqrt{\frac{\nu^2}{\alpha_1^2} - 4C_1 C(\alpha_1)|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}}.$$

Substituant (3.14) dans cette égalité et simplifiant, nous obtenons

$$\rho_1(\mathbf{f}) \leq \frac{\nu}{K(\alpha_1)(1+\sqrt{1-\frac{2C_1\alpha_1 C(\alpha_1)}{K(\alpha_1)}}}.$$

Mais

$$\sqrt{1-\frac{2C_1\alpha_1 C(\alpha_1)}{K(\alpha_1)}} = L(\alpha_1),$$

d'où

$$\rho_1(\mathbf{f}) \leq \frac{\nu}{K(\alpha_1)(1+L(\alpha_1))} < \frac{\nu}{K(\alpha_1)}.$$

De l'inégalité précédente, on déduit

$$\nu - K(\alpha_1)\rho_1(\mathbf{f}) \geq \frac{\nu L(\alpha_1)}{1+L(\alpha_1)}.$$

La dernière inégalité découle alors de $L(\alpha_1) \leq 1$.
$\triangle$

On note $B_{V_2}(R)$, la boule dans V_2, fermée, de centre O et de rayon R et, pour tout $\mathbf{f}$ dans $L^2(\Omega)^3$, on note $S_m(\mathbf{f})$, l'ensemble des solutions $\mathbf{u}_m$ du problème (2.2) avec $\mathbf{f}$ pour second membre. On a démontré au Paragraphe 2 que $S_m(\mathbf{f})$ n'est pas l'ensemble vide. Enfin on définit l'ensemble suivant:

$$E_m = \{r \in]0,+\infty[;\, |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \leq r \Longrightarrow S_m(\mathbf{f}) \subset B_{V_2}(\nu/(2C_1\alpha_1 C(\alpha_1)))\}.$$

Lemme 3.4 *L'ensemble E_m est un intervalle non vide. Il est ouvert à gauche et son extrémité inférieure est* 0.

Démonstration. Soit $\mathbf{u}_m$ appartenant à $S_m(\mathbf{f})$. Utilisant (2.3) et (3.12), on déduit

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \frac{\mathcal{P}\sqrt{(\mathcal{P}^2+\alpha_1)\lambda_m}}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mais

$$\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}\mathcal{P}}|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}. \tag{3.16}$$

D'où

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \frac{\alpha_1}{\nu}\sqrt{\frac{(\mathcal{P}^2+\alpha_1)\lambda_m}{2}}|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}.$$

De là

$$r = \frac{\nu^2}{\alpha_1^2 C(\alpha_1) C_1\sqrt{2(\mathcal{P}^2+\alpha_1)\lambda_m}} \in E_m$$

et l'ensemble E_m n'est pas vide. Pour cette valeur de r, $]0,r] \subset E_m \subset]0,+\infty[$.

Si r_1 et r_2 sont dans E_m, avec $r_1 \leq r_2$, alors $]0,r_2] \subset E_m$, donc $[r_1,r_2] \subset E_m$. On en déduit que E_m est un intervalle, ouvert à gauche, d'extrémité inférieure 0.
$\triangle$

Nous allons établir le théorème principal de ce paragraphe, qui donne une majoration dans V_2 de toute solution $\mathbf{u}_m$ du problème approché (2.2).

Théorème 3.5 *Soit Ω un ouvert de $I\!R^3$, borné et simplement connexe avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Soit $\mathbf{f}$ donné dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire*

$$\frac{\sqrt{2}}{\alpha_1}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\nu^2}{2\alpha_1 K(\alpha_1)}, \tag{3.17}$$

où $K(\alpha_1)$ est définie par (2.8). Soit $m \geq 1$. Alors toute solution $\mathbf{u}_m$ du problème (2.2) satisfait la majoration:

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \frac{\frac{\nu}{\alpha_1} - \sqrt{\frac{\nu^2}{\alpha_1^2} - 4C_1 C(\alpha_1)(\frac{\sqrt{2}}{\alpha_1}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)})}}{2C_1 C(\alpha_1)}. \tag{3.18}$$

Démonstration. La démonstration s'effectue en plusieurs étapes. Posons

$$r^* = \frac{\nu^2}{2\alpha_1 K(\alpha_1)} \text{ et } r_m = \sup E_m.$$

Tout d'abord, utilisant (3.7), (3.17) s'écrit $|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < r^*$. On va montrer, par contradiction, que, pour tout $m \geq 1$, on a $r_m \geq r^*$. Supposons qu'il existe $m_0 \geq 1$, tel que

$$r_{m_0} < r^*. \tag{3.19}$$

La méthode de démonstration est la suivante. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on va construire deux fonctions $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}_2$, vérifiant $|||\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \leq \varepsilon$, telles que, pour une solution $\mathbf{u}_{m_0} \in S_{m_0}(\mathbf{f}_1)$, on ait $\|\mathbf{u}_{m_0}\|_{V_2} \geq \rho_2(\mathbf{f}_1)$ et, pour toute solution $\mathbf{u}_{m_0} \in S_{m_0}(\mathbf{f}_2)$, on ait $\|\mathbf{u}_{m_0}\|_{V_2} \leq \rho_1(\mathbf{f}_2)$. Puis, on choisit ε de façon à obtenir la contradiction.

$\mathbf{1}^{\text{ère}}$**étape**. Construction de $\mathbf{f}_1$.

Soit ε tel que

$$0 < \frac{\varepsilon}{2} < r^* - r_{m_0} \text{ et } \frac{\varepsilon}{2} < r_{m_0}. \tag{3.20}$$

Notons qu'on imposera encore une autre condition à ε pour aboutir à la contradiction. Par définition du sup, il existe $\mathbf{f}_1 \in H(\mathbf{rot};\Omega)$ et $\mathbf{u}_{m_0,1} \in S_{m_0}(\mathbf{f}_1)$ tels que

$$r_{m_0} < |||\mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < r_{m_0} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|\mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} > \frac{\nu}{2C_1\alpha_1 C(\alpha_1)}. \tag{3.21}$$

De (3.20) et (3.21), on déduit

$$|||\mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < r_{m_0} + \frac{\varepsilon}{2} < r^* = \frac{\nu^2}{2\alpha_1 K(\alpha_1)}$$

et le Lemme 3.3 donne

$$|||\mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < \frac{\nu^2}{4C_1\alpha_1^2 C(\alpha_1)}.$$

On applique alors le Lemme 3.1 et on obtient que

$$\|\mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} \text{ appartient à } [0, \rho_1(\mathbf{f}_1)] \cap [\rho_2(\mathbf{f}_1), +\infty[.$$

Mais (3.21) implique

$$\|\mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} > \frac{\nu}{2C_1\alpha_1 C(\alpha_1)} \geq \rho_1(\mathbf{f}_1).$$

Donc $\|\mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2}$ appartient à $[\rho_2(\mathbf{f}_1), +\infty[$, soit

$$\|\mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} \geq \rho_2(\mathbf{f}_1). \tag{3.22}$$

2[ème]**étape**. Construction de $\mathbf{f}_2$.

Puisque $r_{m_0}^2 - \varepsilon^2/4 < r_{m_0}^2$, on déduit que

$$\frac{r_{m_0} - \varepsilon/2}{r_{m_0}} < \frac{r_{m_0}}{r_{m_0} + \varepsilon/2}.$$

De là, on peut choisir k tel que

$$\frac{r_{m_0} - \varepsilon/2}{r_{m_0}} < k < \frac{r_{m_0}}{r_{m_0} + \varepsilon/2}. \tag{3.23}$$

De plus (3.20) implique $k > 0$. Posons

$$\mathbf{f}_2 = k\mathbf{f}_1.$$

Alors, de (3.21), il suit que

$$k\, r_{m_0} < |||\mathbf{f}_2|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < k(r_{m_0} + \varepsilon/2)$$

et, compte tenu de (3.23),

$$r_{m_0} - \varepsilon/2 < |||\mathbf{f}_2|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < r_{m_0}. \tag{3.24}$$

Puisque r_{m_0} est l'extrémité supérieure de l'intervalle E_{m_0}, cela implique que

$$r = |||\mathbf{f}_2|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \text{ appartient à } E_{m_0}.$$

De la définition de l'ensemble E_{m_0}, on déduit que

$$\forall \mathbf{u}_{m_0} \in S_{m_0}(\mathbf{f}_2),\ \|\mathbf{u}_{m_0}\|_{V_2} \leq \frac{\nu}{2C_1\alpha_1 C(\alpha_1)}.$$

On peut donc choisir $\mathbf{u}_{m_0,2} \in S_{m_0}(\mathbf{f}_2)$, tel que

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2}\|_{V_2} \leq \frac{\nu}{2C_1\alpha_1 C(\alpha_1)}. \tag{3.25}$$

Puis, de (3.24) et (3.19), on déduit

$$|||\mathbf{f}_2|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < r_{m_0} < r^* = \frac{\nu^2}{2\alpha_1 K(\alpha_1)}. \tag{3.26}$$

Alors le Lemme 3.3 donne $|||\mathbf{f}_2|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < \dfrac{\nu^2}{4C_1\alpha_1^2 C(\alpha_1)}$. De là, grâce au Lemme 3.1, il s'ensuit que

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2}\|_{V_2} \text{ appartient à } [0, \rho_1(\mathbf{f}_2)] \cap [\rho_2(\mathbf{f}_2), +\infty[.$$

Mais (3.25) et l'inégalité $\dfrac{\nu}{2C_1\alpha_1 C(\alpha_1)} < \rho_2(\mathbf{f}_2)$ impliquent que $\|\mathbf{u}_{m_0,2}\|_{V_2}$ n'appartient pas à $[\rho_2(\mathbf{f}_2), +\infty[$. Nous pouvons donc conclure que

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2}\|_{V_2} \le \rho_1(\mathbf{f}_2). \tag{3.27}$$

3$^{\text{ème}}$étape. Majoration de $\|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2}$.

De (3.26) et du Lemme 3.3, on déduit

$$\rho_1(\mathbf{f}_2) < \frac{\nu}{K(\alpha_1)}.$$

De là, avec (3.27), par application du Lemme 2.2, on obtient

$$|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}|_{H^1(\Omega)} \le \frac{\mathcal{P}}{\nu - K(\alpha_1)\rho_1(\mathbf{f}_2)} \|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors le Lemme 3.2 et (3.16) donnent

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} \le \frac{\alpha_1}{\nu - \rho_1(\mathbf{f}_2)K(\alpha_1)} \sqrt{\frac{(\mathcal{P}^2 + \alpha_1)\lambda_{m_0}}{2}} |||\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}. \tag{3.28}$$

Par construction de $\mathbf{f}_2$ et du fait que $k < 1$, on a $|||\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} = (1-k)|||\mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$. Alors (3.21) et (3.23) impliquent

$$|||\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{2\, r_{m_0}}(r_{m_0} + \varepsilon/2)$$

et, avec (3.20), cela devient

$$|||\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \le \varepsilon. \tag{3.29}$$

Enfin le Lemme 3.3 donne

$$\frac{1}{\nu - K(\alpha_1)\rho_1(\mathbf{f}_2)} \le \frac{2}{\nu L(\alpha_1)}. \tag{3.30}$$

Rassemblant les inégalités (3.29) et (3.30) et les substituant dans (3.28), nous obtenons

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} \le \frac{\alpha_1}{\nu L(\alpha_1)} \sqrt{2(\mathcal{P}^2 + \alpha_1)\lambda_{m_0}}\, \varepsilon. \tag{3.31}$$

4$^{\text{ème}}$étape. Conclusion.

Les inégalités (3.22), (3.27) et l'inégalité triangulaire impliquent

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} \ge |\, \|\mathbf{u}_{m_0,2}\|_{V_2} - \|\mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2}| \ge \rho_2(\mathbf{f}_1) - \rho_1(\mathbf{f}_2). \tag{3.32}$$

De (3.26), en appliquant le Lemme 3.3, nous obtenons

$$\rho_1(\mathbf{f}_2) \le \frac{\nu}{K(\alpha_1)(1+L(\alpha_1))}.$$

Puisque $K(\alpha_1) \ge 2C_1\alpha_1 C(\alpha_1)$, cela devient

$$\rho_1(\mathbf{f}_2) \le \frac{\nu}{2C_1\alpha_1 C(\alpha_1)(1+L(\alpha_1))}.$$

Considérant que

$$\rho_2(\mathbf{f}_1) \ge \frac{\nu}{2C_1\alpha_1 C(\alpha_1)}$$

et que $L(\alpha_1) \le 1$, on déduit que

$$\rho_2(\mathbf{f}_1) - \rho_1(\mathbf{f}_2) \ge \frac{\nu L(\alpha_1)}{4C_1\alpha_1 C(\alpha_1)}. \tag{3.33}$$

Alors, (3.32) et (3.33) impliquent

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} \ge \frac{\nu L(\alpha_1)}{4C_1\alpha_1 C(\alpha_1)}. \tag{3.34}$$

De (3.31) et (3.34), il suit que, pour aboutir à la contradiction, c'est-à-dire

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} < \|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2},$$

il faut que ε vérifie, en plus de (3.20), la condition

$$\varepsilon < \frac{\nu^2 (L(\alpha_1))^2}{4C_1\alpha_1^2 C(\alpha_1)\sqrt{2(\mathcal{P}^2+\alpha_1)\lambda_{m_0}}}. \tag{3.35}$$

Finalement, nous avons la contradiction en choisissant ε tel que

$$0 < \varepsilon < \min(2\,r_{m_0}, 2(r^* - r_{m_0}), \frac{\nu^2 (L(\alpha_1))^2}{4C_1\alpha_1^2 C(\alpha_1)\sqrt{2(\mathcal{P}^2+\alpha_1)\lambda_{m_0}}}).$$

Ainsi, pour tout $m \ge 1$, on obtient $r_m \ge r^*$. Mais, par définition de $|||\ \ |||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$ et r^*, l'hypothèse (3.17) du théorème s'écrit

$$|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < r^*.$$

Donc, pour tout $m \ge 1$, on a $r = |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < r_m$, ce qui implique

$$r = |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \in E_m, \text{ pour tout } m \ge 1.$$

Par définition de E_m, nous obtenons que toute solution $\mathbf{u}_m$ de (2.2) vérifie

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \le \frac{\nu}{2C_1\alpha_1 C(\alpha_1)}.$$

Alors les Lemmes 3.3 et 3.1 impliquent

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \rho_1(\mathbf{f}),$$

ce qui est la conclusion du théorème.
$\triangle$

Essayons de comprendre la majoration du Théorème 3.5:

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \rho_1(\mathbf{f}),$$

vérifiée sous l'hypothèse (3.17).

Les inégalités (3.12) et (2.3) impliquent

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \frac{\mathcal{P}\sqrt{(\mathcal{P}^2+\alpha_1)\lambda_m}}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)},$$

c'est-à-dire que $\|\mathbf{u}_m\|_{v_2}$ tend vers 0, quand $\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}$ tend vers 0. Donc, sous l'hypothèse (3.17), l'alternative

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \rho_1(\mathbf{f}) \text{ ou } \|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \geq \rho_2(\mathbf{f})$$

du Lemme 3.1 impose que, pour $\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}$ assez petit, on ait

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \rho_1(\mathbf{f}).$$

Mais si on a cette majoration, la dépendance continue de $\mathbf{u}_m$ par rapport à la donnée $\mathbf{f}$, donnée par le Lemme 2.2, fait que le réel $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$ ne peut “franchir l'obstacle” constitué par l'intervalle $[\rho_1(\mathbf{f}), \rho_2(\mathbf{f})]$, qui est de longueur $\rho_2(\mathbf{f}) - \rho_1(\mathbf{f}) > 0$. Ainsi, sous l'hypothèse (3.17), qui permet aux Lemmes 2.2 et 3.1 de s'appliquer, l'alternative

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \geq \rho_2(\mathbf{f})$$

ne peut se produire.

Enfin, on peut remarquer, en utilisant la forme conjuguée du numérateur de $\rho_1(\mathbf{f})$, que

$$\rho_1(\mathbf{f}) \leq \frac{2\alpha_1}{\nu}|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} = \frac{2\sqrt{2}}{\nu}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.36}$$

Donc, sous les hypothèses du Théorème 3.5, on a une majoration plus simple, mais moins bonne

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\nu}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}.$$

4 Existence, unicité et dépendance continue par rapport aux données

Pour $\mathbf{f}$ assez petit dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, on est en mesure de montrer, en utilisant les résultats du paragraphe précédent, que le problème (1.1)-(1.3) admet une solution dans $V_2 \times H^1(\Omega)$. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 4.1 *Soit Ω un ouvert de $I\!R^3$, borné et simplement connexe avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Soit $\mathbf{f}$ donné dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire*

$$\frac{\sqrt{2}}{\alpha_1}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\nu^2}{2\alpha_1 K(\alpha_1)}, \tag{4.1}$$

où $K(\alpha_1)$ est définie par (2.8). Alors le problème (1.1)-(1.3) admet une solution $(\mathbf{u}, p)$ dans $V_2 \times H^1(\Omega)$. De plus $\mathbf{u}$ satisfait la borne supérieure:

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} \leq \frac{\frac{\nu}{\alpha_1} - \sqrt{\frac{\nu^2}{\alpha_1^2} - 4C_1C(\alpha_1)(\frac{\sqrt{2}}{\alpha_1}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)})}}{2C_1C(\alpha_1)}. \tag{4.2}$$

Démonstration. Les hypothèses du Théorème 4.1 sont les mêmes que celles du Théorème 3.5. On peut donc appliquer ce dernier et obtenir une suite $\{\mathbf{u}_m\}_{m\geq 1}$ bornée dans V_2, vérifiant la majoration (3.18), telle que $\mathbf{u}_m$ soit une solution de (2.2). Par injection compacte de V_2 dans $H^2(\Omega)^3$, on peut extraire une sous-suite, encore notée $\{\mathbf{u}_m\}$ telle que

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ dans } V_2 \text{ faible},$$

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ dans } H^2(\Omega)^3 \text{ fort}.$$

Passons à la limite dans l'équation (2.2). La convergence dans $H^2(\Omega)^3$ fort implique

$$\lim_{m\to\infty} \nu(\nabla\mathbf{u}_m, \nabla\mathbf{w}_j) = \nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{w}_j).$$

Utilisant (I.4.3), nous obtenons

$$(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m) \times \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j) = b(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j) + \alpha_1(b(\mathbf{w}_j; \Delta\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) - b(\mathbf{u}_m; \Delta\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j)).$$

On a

$$b(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j) = \sum_{i,k=1}^{3} \int_\Omega u_{m,i}\frac{\partial u_{m,k}}{\partial x_i} w_{j,k}\, d\mathbf{x}.$$

La convergence dans $H^2(\Omega)^3$ fort donne

$$\lim_{m\to\infty} u_{m,i}\frac{\partial u_{m,k}}{\partial x_i} = u_i\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \text{ pp dans } \Omega$$

et, puisque $\mathbf{u}_m$ est borné dans V_2,

$$u_{m,i}\frac{\partial u_{m,k}}{\partial x_i} \text{ est borné dans } L^2(\Omega).$$

De là

$$\lim_{m\to\infty} u_{m,i}\frac{\partial u_{m,k}}{\partial x_i} = u_i\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}.$$

D'où on déduit

$$\lim_{m\to\infty} b(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j) = b(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{w}_j).$$

Ensuite, l'antisymétrie de b implique

$$b(\mathbf{u}_m; \Delta\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j) = -b(\mathbf{u}_m; \mathbf{w}_j, \Delta\mathbf{u}_m) = -\sum_{i,k=1}^{3} \int_\Omega u_{m,i}\Delta u_{m,k} \frac{\partial w_{j,k}}{\partial x_i}\, d\mathbf{x}.$$

On a encore, par convergence forte dans $H^2(\Omega)^3$ de $\mathbf{u}_m$,

$$\lim_{m\to\infty} u_{m,i}\Delta u_{m,k} = u_i \Delta u_k \text{ pp dans } \Omega$$

et, puisque $u_{m,i}\Delta u_{m,k}$ est borné dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\lim_{m\to\infty} u_{m,i}\Delta u_{m,k} = u_i\Delta u_k \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

De là

$$\lim_{m\to\infty} b(\mathbf{u}_m; \Delta\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j) = b(\mathbf{u}; \Delta\mathbf{u}, \mathbf{w}_j).$$

De même, on obtient

$$\lim_{m\to\infty} b(\mathbf{w}_j; \Delta\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) = b(\mathbf{w}_j; \Delta\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Utilisant ces convergences, nous avons, pour tout $j \geq 1$,

$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{w}_j) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u}, \mathbf{w}_j) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_j)$$

et par densité, pour tout $\mathbf{v} \in V$,

$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}).$$

Puisque $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^3; \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} = 0\}$ est dense dans H, cette égalité implique

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} - \mathbf{f} \text{ appartient à } H^\perp.$$

De là, il existe $p \in H^1(\Omega)$ tel que

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} - \mathbf{f} = -\nabla p.$$

Donc $\mathbf{u}$ est solution de (1.1). Puisque $\mathbf{u} \in V_2$, (1.2) et (1.3) sont vérifiés. Enfin, par semi-continuité inférieure de la norme pour la topologie faible, $\mathbf{u}$ vérifie (4.2).
$\triangle$

Théorème 4.2 *Sous les hypothèses du Théorème 4.1, le problème (1.1)-(1.3) admet une solution unique dans V_2. De plus cette solution vérifie la majoration (4.2).*

Démonstration. Le Théorème 4.1 implique l'existence d'une solution $\mathbf{u}$ du problème (1.1)-(1.3), vérifiant la majoration (4.2). Soit $\mathbf{u}^*$ une solution quelconque dans V_2 du problème (1.1)-(1.3) avec le même second membre $\mathbf{f}$. Pour démontrer l'unicité, il suffit de prouver $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$. La démonstration est analogue à celle du Lemme 2.2. Clairement $\mathbf{u}$ est solution de l'équation variationnelle

$$\forall \mathbf{v} \in V\ ,\ \nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \tag{4.3}$$

et $\mathbf{u}^*$ est solution de la même équation. Posons

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*.$$

Alors $\mathbf{U}$ satisfait l'égalité, pour tout $\mathbf{v}$ dans V,

$$\nu(\nabla \mathbf{U}, \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{rot}(\mathbf{U} - \alpha_1 \Delta \mathbf{U}) \times \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u}^* - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}^*) \times \mathbf{U}, \mathbf{v}) = 0.$$

On choisit $\mathbf{v} = \mathbf{U}$ et on remarque que $(\mathbf{z} \times \mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$. D'où $\mathbf{U}$ vérifie l'égalité

$$\nu |\mathbf{U}|^2_{H^1(\Omega)} + (\mathbf{rot}(\mathbf{U} - \alpha_1 \Delta \mathbf{U}) \times \mathbf{u}, \mathbf{U}) = 0. \tag{4.4}$$

De manière analogue à (2.15), nous avons

$$|(\mathbf{rot}(\mathbf{U} - \alpha_1 \Delta \mathbf{U}) \times \mathbf{u}, \mathbf{U})| \leq K(\alpha_1) \|\mathbf{u}\|_{V_2} |\mathbf{U}|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{4.5}$$

où $K(\alpha_1)$ est donnée par (2.8). On remarque que (4.2) s'écrit

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} \leq \rho_1(\mathbf{f}),$$

où $\rho_1(\mathbf{f})$ est défini dans le Lemme 3.1. Utilisant cette majoration dans (4.5) et substituant dans (4.4), on obtient

$$(\nu - K(\alpha_1)\rho_1(\mathbf{f})) |\mathbf{U}|^2_{H^1(\Omega)} \leq 0. \tag{4.6}$$

Enfin le Lemme 3.3 implique $\nu - K(\alpha_1)\rho_1(\mathbf{f}) > 0$. De là $\mathbf{U} = 0$.
$\triangle$

Les deux théorèmes précédents permettent de démontrer un théorème de continuité des solutions du problème (1.1)-(1.3) par rapport aux données.

Théorème 4.3 *Soit Ω un ouvert de $I\!R^3$, borné et simplement connexe avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Pour $i = 1, 2$, soit $\mathbf{f}_i$ donné dans $H(\mathbf{rot}; \Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire*

$$\frac{\sqrt{2}}{\alpha_1} \mathcal{P} \|\mathbf{f}_i\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\, \mathbf{f}_i\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\nu^2}{2\alpha_1 K(\alpha_1)}, \tag{4.7}$$

où $K(\alpha_1)$ est définie par (2.8). Si $\mathbf{u}_i$ est la solution du problème (1.1)-(1.3) associée au second membre $\mathbf{f}_i$, alors on a la majoration:

$$|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2\mathcal{P}}{\nu L(\alpha_1)} \|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.8}$$

où $L(\alpha_1)$ est définie par (3.15).

Démonstration. On applique la même méthode que dans le Lemme 2.2. Si on pose

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1,$$

on peut vérifier que

$$\nu |\mathbf{U}|^2_{H^1(\Omega)} + (\mathbf{rot}(\mathbf{U} - \alpha_1 \Delta \mathbf{U}) \times \mathbf{u}_2, \mathbf{U}) = (\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1, \mathbf{U}). \tag{4.9}$$

Nous avons la relation analogue à (2.15)

$$|(\mathbf{rot}(\mathbf{U} - \alpha_1 \Delta \mathbf{U}) \times \mathbf{u}_2, \mathbf{U})| \leq K(\alpha_1) \|\mathbf{u}_2\|_{V_2} |\mathbf{U}|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{4.10}$$

où $K(\alpha_1)$ est donnée par (2.8). On remarque que, d'après le Théorème 4.2, on a

$$\|\mathbf{u}_2\|_{V_2} \leq \rho_1(\mathbf{f}_2).$$

De là, avec (4.10) et Poincaré, (4.9) implique

$$\nu |\mathbf{U}|^2_{H^1(\Omega)} \leq K(\alpha_1)\rho_1(\mathbf{f}_2)|\mathbf{U}|^2_{H^1(\Omega)} + \mathcal{P}\|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|_{L^2(\Omega)} |\mathbf{U}|_{H^1(\Omega)}.$$

Le Lemme 3.3 permet alors de conclure.
△

5 Régularité, solution classique

Dans ce paragraphe, nous supposons que le problème (1.1)-(1.3) a une solution $\mathbf{u}$ dans V_2. Nous supposons que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, simplement connexe, avec une frontière $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{p} \Gamma_i$ (Γ_i connexe) au moins de classe $C^{3,1}$.

5.1 Introduction

Nous aurons besoin des résultats de la Remarque I.2.3, dont nous donnons ici la démonstration.

Lemme 5.1 *Supposons que Ω soit un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, simplement connexe. Pour tout entier $m \geq 0$, si la frontière Γ est de classe $C^{m+2,1}$ et si $\mathbf{v}$ appartient à V avec* $\mathbf{rot}$ $(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})$ *dans $H^m(\Omega)^3$, alors $\mathbf{v}$ appartient à $H^{m+3}(\Omega)^3$ et il existe une constante $K_m(\alpha_1)$ telle que*

$$\|\mathbf{v}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq K_m(\alpha_1) \|\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|_{H^m(\Omega)}. \tag{5.1}$$

Démonstration. Puisque $\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}$ appartient à $H^{-1}(\Omega)^3$ et $\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})$ au moins à $L^2(\Omega)^3$, on peut montrer que

$$< \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}).\mathbf{n}, 1 >_{\Gamma_i} = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq p.$$

Posons

$$\mathbf{y} = \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}).$$

Alors on a

$$\mathbf{y} \in H^m(\Omega)^3 \ , \ \operatorname{div} \mathbf{y} = 0 \text{ et } \ < \mathbf{y}.\mathbf{n}, 1 >_{\Gamma_i} = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq p.$$

De là, on déduit qu'il existe $\boldsymbol{\psi}$ dans $X(\Omega)$ tel que

$$\mathbf{y} = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\psi} \text{ et } \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0 \text{ dans } \Omega \ , \ \boldsymbol{\psi}.\mathbf{n} = 0 \textbf{ sur } \Gamma.$$

Puisque $\boldsymbol{\psi} \in L^2(\Omega)^3$, $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi} \in H^m(\Omega)^3$, $\operatorname{div}\boldsymbol{\psi} = 0 \in H^m(\Omega)$ et $\boldsymbol{\psi}.\mathbf{n} = 0 \in H^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ avec Γ de classe $C^{m+2,1}$, le Théorème II.1.9 implique que

$$\boldsymbol{\psi} \text{ appartient à } H^{m+1}(\Omega)^3.$$

De plus, puisque $\boldsymbol{\psi} \in X_T(\Omega)$, on a

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi il existe une constante C_m telle que

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{m+1}(\Omega)} \leq C_m\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}\|_{H^m(\Omega)}. \tag{5.2}$$

Le fait que Ω soit simplement connexe implique qu'il existe p dans $L^2(\Omega)$ tel que

$$\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v} + \nabla p = \boldsymbol{\psi}.$$

De la régularité de Γ et $\boldsymbol{\psi}$ dans ce problème de Stokes, on déduit que $\mathbf{v}$ appartient à $H^{m+3}(\Omega)^3$ et il existe une constante $K'_m(\alpha_1)$ telle que

$$\|\mathbf{v}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq K'_m(\alpha_1)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{m+1}(\Omega)}. \tag{5.3}$$

Finalement, on obtient

$$\|\mathbf{v}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq C_mK'_m(\alpha_1)\|\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v})\|_{H^m(\Omega)},$$

d'où (5.1) suit avec $K_m(\alpha_1) = C_mK'_m(\alpha_1)$.
$\triangle$

Soit $\mathbf{u}$ une solution de (1.1)-(1.3) dans V_2. Prenant le **rot** de l'équation (1.1) en utilisant l'identité

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w}.\nabla\mathbf{v} - \mathbf{v}.\nabla\mathbf{w} + (\operatorname{div}\mathbf{w})\mathbf{v} - (\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{w},$$

nous obtenons

$$\frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) + \mathbf{u}.\nabla(\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})) - \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}).\nabla\mathbf{u} = \mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}. \tag{5.4}$$

Soit $m \geq 1$. Puisque nous savons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (1.1)-(1.3) existe, la précédente équation nous conduit à résoudre l'équation de transport suivante, obtenue quand on remplace $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ par $\mathbf{z}$:

Pour $\mathbf{u}$ donné dans V_2, $\mathbf{f}$ donné dans $L^2(\Omega)^3$ avec $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ dans $H^m(\Omega)^3$, chercher $\mathbf{z}$ dans $H^m(\Omega)^3$ solution de:

$$\frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{z} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{z} - \mathbf{z}.\nabla\mathbf{u} = \mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}. \tag{5.5}$$

Remarquons que, sous l'hypothèse $\mathbf{f}$ dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, si $\mathbf{u}$ est solution dans V_2 de (1.1)-(1.3), l'équation (5.4) montre que $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})$ est solution dans $L^2(\Omega)^3$ de l'équation (5.5).

5.2 Régularité H^4 de la solution

On suppose ici $\mathbf{f}$ dans $L^2(\Omega)^3$ avec $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ dans $H^1(\Omega)^3$. Pour construire une solution dans $H^1(\Omega)^3$ du problème (5.5), on discrétise (5.5) en utilisant la même base qu'au Paragraphe I.6.3. Le problème discrétisé s'écrit:

Chercher

$$\mathbf{z}_m = \sum_{j=1}^{m} c_{j,m}\mathbf{w}_j,$$

solution, pour $1 \le i \le m$, de

$$\frac{\nu}{\alpha_1}(\mathbf{z}_m, \mathbf{w}_i) + b(\mathbf{u}; \mathbf{z}_m, \mathbf{w}_i) - b(\mathbf{z}_m; \mathbf{u}, \mathbf{w}_i) = (\mathbf{rot}\,\mathbf{f}, \mathbf{w}_i) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\mathbf{rot}\,\mathbf{u}, \mathbf{w}_i). \tag{5.6}$$

Le problème (5.6) est un système linéaire $m \times m$. La matrice $A = (a_{ij})$ du système est donnée par:

$$a_{ij} = \frac{\nu}{\alpha_1}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_i) + b(\mathbf{u}; \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_i) - b(\mathbf{w}_j; \mathbf{u}, \mathbf{w}_i).$$

Soit $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$, posons

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \mathbf{w}_j.$$

Alors nous avons, compte tenu de l'antisymétrie de b,

$$A\boldsymbol{\xi}.\boldsymbol{\xi} = \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} - b(\mathbf{v}; \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Du Lemme I.3.5, de (I.2.15) et de (1.7), on déduit

$$A\boldsymbol{\xi}.\boldsymbol{\xi} \ge \|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\frac{\nu}{\alpha_1} - C_1 C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}\right). \tag{5.7}$$

Donc, sous l'hypothèse $\|\mathbf{u}\|_{V_2} < \dfrac{\nu}{C_1\alpha_1 C(\alpha_1)}$, la forme quadratique $\boldsymbol{\xi} \to A\boldsymbol{\xi}.\boldsymbol{\xi}$ est définie positive. La matrice A est alors inversible, ce qui implique que le problème (5.6) a une solution $\mathbf{z}_m$ unique dans $H^1(\Omega)^3$. Nous avons démontré le résultat suivant.

Lemme 5.2 *Supposons que Ω soit un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, simplement connexe, avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Si $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ est dans $L^2(\Omega)^3$ et si $\mathbf{u}$ est dans V_2 assez petit pour vérifier*

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} < \frac{\nu}{C_1\alpha_1 C(\alpha_1)},$$

alors le problème (5.6) admet une solution $\mathbf{z}_m$ unique dans $H^1(\Omega)^3$.

Pour passer à la limite dans (5.6), il suffit de montrer que la solution $\mathbf{z}_m$ est bornée dans $H^1(\Omega)^3$. Précisément, on démontre le résultat suivant.

Lemme 5.3 *En plus des hypothèses du Lemme 5.2, supposons que* $\mathbf{rot\, f}$ *soit dans* $H^1(\Omega)^3$ *et que* $\mathbf{u}$ *vérifie*

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} \le \rho, \text{ avec } \rho < \frac{\nu}{(2C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C(\alpha_1)}. \tag{5.8}$$

Alors la solution $\mathbf{z}_m$ *de (5.6) est bornée comme suit:*

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)} \le \frac{\sqrt{2}C(\alpha_1)\nu\rho + \alpha_1 \|\mathbf{rot\, f}\|_{H^1(\Omega)}}{\nu - (2C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C(\alpha_1)\rho}. \tag{5.9}$$

Démonstration. Multipliant les deux membres de (5.6) par $\lambda_j c_{j,m}$, appliquant (I.6.13) et sommant par rapport à j, on obtient

$$\frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{z}_m\|^2_{H^1(\Omega)} + (\nabla(\mathbf{u}.\nabla \mathbf{z}_m), \nabla \mathbf{z}_m) - (\mathbf{z}_m.\nabla \mathbf{u}, \mathbf{z}_m)$$
$$-(\nabla(\mathbf{z}_m.\nabla \mathbf{u}), \nabla \mathbf{z}_m) = (\mathbf{rot\, f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot\, u}, \mathbf{z}_m)_{H^1(\Omega)}. \tag{5.10}$$

Tous ces termes sont bien définis, par suite des régularités de $\mathbf{w}_j$ et $\mathbf{u}$. Le seul terme qui pose un problème dans (5.10) est $(\nabla(\mathbf{u}.\nabla \mathbf{z}_m), \nabla\, \mathbf{z}_m)$, car il fait intervenir la dérivée seconde de $\mathbf{z}_m$ qui ne peut pas être contrôlée par les termes positifs du membre de gauche. Comme dans le Paragraphe I.6.3, on développe ce terme, et la formule de Green donne

$$(u_l \frac{\partial^2 z_{m,i}}{\partial x_k \partial x_l}, \frac{\partial z_{m,i}}{\partial x_k}) = -(\operatorname{div} \mathbf{u}, \frac{1}{2}|\nabla \mathbf{z}_m|^2) = 0,$$

car $\mathbf{u}$ appartient à V. Donc

$$(\nabla(\mathbf{u}.\nabla \mathbf{z}_m), \nabla \mathbf{z}_m) = \sum_{k=1}^{3} b(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}; \mathbf{z}_m, \frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_k}).$$

De là, avec (1.7), nous déduisons une majoration analogue à (I.6.18):

$$|(\nabla(\mathbf{u}.\nabla \mathbf{z}_m), \nabla \mathbf{z}_m)| \le C_1 C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}|\mathbf{z}_m|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{5.11}$$

De même, par les mêmes procédés, on obtient des majorations analogues à (I.6.19) et (I.6.24):

$$|(\mathbf{z}_m.\nabla \mathbf{u}, \mathbf{z}_m)| \le C_1 C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}\|\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{5.12}$$

$$|(\nabla(\mathbf{z}_m.\nabla\, \mathbf{u}), \nabla\, \mathbf{z}_m)| \le C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}(C_1|\mathbf{z}_m|^2_{H^1(\Omega)} + C_2^{3/2}\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}). \tag{5.13}$$

Considérant le second membre, le Lemme I.3.3 donne

$$\|\mathbf{rot\, u}\|_{H^1(\Omega)} \le \sqrt{2}\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}.$$

Finalement, rassemblant les inégalités précédentes et simplifiant par $\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)}$, on obtient

$$\frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)} \le (2C_1 + C_2^{3/2})C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{rot\, f}\|_{H^1(\Omega)} + \frac{\sqrt{2}\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}. \tag{5.14}$$

Considérant que $\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} \le \|\mathbf{u}\|_{H^3(\Omega)} \le C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}$ et utilisant les hypothèses de l'énoncé, on obtient (5.9).
$\triangle$

Lemme 5.4 *En plus des hypothèses du Théorème 4.1, supposons que* $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ *appartienne à* $H^1(\Omega)^3$*. Alors le problème (5.5) admet une solution dans* $H^1(\Omega)^3$*.*

Démonstration. Tout d'abord, en appliquant les Théorèmes 4.1 et 4.2, on obtient l'existence et l'unicité d'une solution $\mathbf{u}$ de (1.1)-(1.3), vérifiant la majoration

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} \leq \rho_1(\mathbf{f}).$$

Du Lemme 3.3, on déduit

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} < \frac{\nu}{K(\alpha_1)}. \tag{5.15}$$

D'une part, puisque

$$\frac{\nu}{K(\alpha_1)} < \frac{\nu}{C_1\alpha_1 C(\alpha_1)},$$

le Lemme 5.2 donne l'existence d'une solution unique $\mathbf{z}_m$ du problème 5.6. D'autre part, puisque

$$\frac{\nu}{K(\alpha_1)} < \frac{\nu}{(2C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C(\alpha_1)},$$

nous pouvons appliquer le Lemme 5.3 avec $\rho = \dfrac{\nu}{K(\alpha_1)}$ et nous déduisons, pour tout $m \geq 1$,

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{2}C(\alpha_1)\nu^2 + \alpha_1 K(\alpha_1)\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)}}{\nu K(\alpha_1) - (2C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C(\alpha_1)\nu}.$$

Utilisant l'expression de $K(\alpha_1)$, nous obtenons, pour tout $m \geq 1$,

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{2}C(\alpha_1)\nu^2 + \alpha_1 K(\alpha_1)\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)}}{\sqrt{\mathcal{P}^2 + 1}C_2^{3/2}C(\alpha_1)\nu}. \tag{5.16}$$

Il découle de (5.16) que la suite $\{\mathbf{z}_m\}$ est uniformément bornée par rapport à m dans $H^1(\Omega)^3$. De là, il existe une fonction $\mathbf{z}$ dans $H^1(\Omega)^3$ et une sous-suite de $\{\mathbf{z}_m\}$, encore notée $\{\mathbf{z}_m\}$, telles que

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{z}_m = \mathbf{z} \quad \text{dans } H^1(\Omega)^3 \text{ faible.}$$

Puisque le problème est linéaire, nous pouvons facilement passer à la limite dans (5.6) et montrer que $\mathbf{z} \in H^1(\Omega)^3$ satisfait (5.5).
$\triangle$

Suivant la remarque qui suit l'équation (5.5), $\mathbf{z}$ et $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ sont deux solutions de (5.5) dans $L^2(\Omega)^3$. Pour obtenir $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$, il suffit donc de démontrer que (5.5) n'a qu'une solution dans $L^2(\Omega)^3$, c'est-à-dire que le problème:

Chercher $\boldsymbol{\zeta}$ dans $L^2(\Omega)^3$, solution de:

$$\frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}.\nabla\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{5.17}$$

a une solution unique, qui est $\mathbf{0}$.

On procède par transposition. Le lemme suivant établit une formulation variationnelle équivalente du problème (5.17). On définit la notation $\nabla\mathbf{u}.\boldsymbol{\varphi}$ par, pour $i = 1, 2, 3$,

$$(\nabla\mathbf{u}.\boldsymbol{\varphi})_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\varphi_j.$$

Lemme 5.5 *Le problème (5.17) admet la formulation variationnelle équivalente:*
Chercher $\boldsymbol{\zeta}$ dans $L^2(\Omega)^3$, solution de:

$$\forall\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega)^3 \ , \ (\boldsymbol{\zeta}, -\frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\varphi} + \nabla\mathbf{u}.\boldsymbol{\varphi}) = 0. \tag{5.18}$$

Démonstration. Soient $\boldsymbol{\zeta}$ solution de (5.18) et $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$. Considérant que

$$(\boldsymbol{\zeta}, \nabla\mathbf{u}.\boldsymbol{\varphi}) = (\boldsymbol{\zeta}.\nabla\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}),$$

on a

$$(\mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\zeta}) = (\frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}.\nabla\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}).$$

Mais, au sens des distributions, comme $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, on obtient

$$< \mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\varphi} >= \sum_{i,j=1}^{3} < u_j\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_j}, \varphi_i >= \sum_{i,j=1}^{3} < \frac{\partial(u_j\zeta_i)}{\partial x_j}, \varphi_i >= -\sum_{i,j=1}^{3} < u_j\zeta_i, \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} > .$$

D'où

$$< \mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\varphi} >= -(\mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\zeta}).$$

On en déduit

$$-\mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\zeta} = \frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}.\nabla\mathbf{u}.$$

De là, (5.17) suit.

Réciproquement, si $\boldsymbol{\zeta}$ est solution de (5.17),

$$\mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}.\nabla\mathbf{u} - \frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\zeta}. \tag{5.19}$$

Donc $\mathbf{u}.\nabla\,\boldsymbol{\zeta}$ appartient à $L^2(\Omega)^3$ et avec $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, cela donne, pour $1 \leq i \leq 3$,

$$\operatorname{div}(\zeta_i\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{3} u_j\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_j} \text{ appartient à } L^2(\Omega).$$

On en déduit que $\zeta_i\mathbf{u}$ appartient à $H(\operatorname{div};\Omega)$ et si $\boldsymbol{\varphi}$ appartient à $H^1(\Omega)^3$, la formule de Green donne, pour $1 \leq i \leq 3$,

$$(\operatorname{div}(\zeta_i\mathbf{u}), \varphi_i) = -(\zeta_i\mathbf{u}, \nabla\varphi_i),$$

car $\mathbf{u}$ appartient à V. Ainsi, d'une part

$$(\mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\varphi}) = -(\mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\zeta}). \tag{5.20}$$

D'autre part
$$(\boldsymbol{\zeta}.\nabla\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}) = (\nabla\mathbf{u}.\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\zeta}). \tag{5.21}$$
Alors l'égalité (5.18) suit de (5.19), (5.20) et (5.21).
△

Lemme 5.6 *Supposons que Ω soit un ouvert borné de $I\!R^3$, simplement connexe, avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Si $\mathbf{u}$ est donné dans V_2, assez petit pour vérifier (5.8), alors l'unique solution de (5.17) est $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$.*

Démonstration. Pour tout $\mathbf{g}$ dans $H^1(\Omega)^3$, on étudie le problème:
Chercher $\boldsymbol{\varphi}$ dans $H^1(\Omega)^3$, solution de:
$$-\frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\varphi} + \nabla\mathbf{u}.\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{g}. \tag{5.22}$$
Ce problème est analogue au problème (5.5). On définit le problème approché correspondant. On a les mêmes majorations et on est conduit à l'inégalité suivante, similaire à (5.14):
$$\frac{\nu}{\alpha_1}\|\boldsymbol{\varphi}_m\|_{H^1(\Omega)} \leq (2C_1 + C_2^{3/2})C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}\|\boldsymbol{\varphi}_m\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{H^1(\Omega)}.$$
Sous l'hypothèse (5.8), la suite $\{\boldsymbol{\varphi}_m\}_{m\geq 1}$ est bornée dans $H^1(\Omega)^3$. En passant à la limite, on obtient l'existence d'une solution $\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega)^3$ pour le problème (5.22). Alors toute solution $\boldsymbol{\zeta}$ du problème variationnel (5.18) vérifie
$$\forall \mathbf{g} \in H^1(\Omega)^3\ ,\ (\boldsymbol{\zeta},\mathbf{g}) = 0.$$
De là, par densité, on déduit $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$. L'unicité de la solution de (5.17) découle alors du Lemme 5.5.
△

On va maintenant établir le théorème principal du paragraphe.

Théorème 5.7 *Soit Ω un ouvert de $I\!R^3$, borné et simplement connexe avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Soit $\mathbf{f}$ donné dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire*
$$\frac{\sqrt{2}}{\alpha_1}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\nu^2}{2\alpha_1 K(\alpha_1)}, \tag{5.23}$$
où $K(\alpha_1)$ est définie par (2.8). Si, de plus, $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartient à $H^1(\Omega)^3$, alors l'unique solution $\mathbf{u}$ dans V_2 de (1.1)-(1.3) appartient à $H^4(\Omega)^3$ et on a la majoration
$$\|\mathbf{u}\|_{H^4(\Omega)} \leq \frac{4\mathcal{P}K(\alpha_1)K_1(\alpha_1)}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha_1 K(\alpha_1)K_1(\alpha_1)(1+2\sqrt{2}C(\alpha_1))}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}C(\alpha_1)}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)}, \tag{5.24}$$
où $K_1(\alpha_1)$ est définie dans le Lemme 5.1.

Démonstration. Le Lemme 5.4 s'applique et donne l'existence d'une solution $\mathbf{z}$ dans $H^1(\Omega)^3$ pour le problème (5.5). Comme dans la démonstration du Lemme 5.4, on montre que, sous la condition (5.23), l'hypothèse (5.8) est vérifiée avec $\rho = \dfrac{\nu}{K(\alpha_1)}$. On applique alors le Lemme 5.6 d'unicité, qui donne $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$, où $\mathbf{u}$ est l'unique solution dans V_2 du problème (1.1)-(1.3). De là $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$ appartient à $H^1(\Omega)^3$ et le Lemme 5.1, avec la régularité $C^{3,1}$ de Γ, implique que $\mathbf{u}$ appartient à $H^4(\Omega)^3$.

Démontrons la majoration (5.24). Reprenons l'inégalité (5.14). Considérant que $\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{u}\|_{H^3(\Omega)} \leq C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}$, on obtient

$$(\frac{\nu}{\alpha_1} - (2C_1 + C_2^{3/2})C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2})\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{2}\nu}{\alpha_1}C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Utilisant (5.15), cela devient

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{2}\nu C(\alpha_1)K(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2} + \alpha_1 K(\alpha_1)\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)}}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}C(\alpha_1)}.$$

De (3.36), nous déduisons $\|\mathbf{u}\|_{V_2} \leq \dfrac{2\alpha_1}{\nu}|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$, que nous substituons dans la majoration précédente. Cela donne

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2\sqrt{2}\alpha_1 C(\alpha_1)K(\alpha_1)|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} + \alpha_1 K(\alpha_1)\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)}}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}C(\alpha_1)}.$$

Enfin, utilisant la définition (3.7) de $|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$, on obtient

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{4K(\alpha_1)\mathcal{P}}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha_1 K(\alpha_1)(1+2\sqrt{2}C(\alpha_1))}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}C(\alpha_1)}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Le passage à la limite implique que $\mathbf{z}$ vérifie la même inégalité. Enfin, du Lemme 5.1, il résulte que $\|\mathbf{u}\|_{H^4(\Omega)} \leq K_1(\alpha_1)\|\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)}$, d'où on déduit (5.24).
$\triangle$

5.3 Régularité H^5 de la solution

On définit le même problème approché (5.6) avec $\mathbf{w}_j$ fonction propre du problème

$$\forall \mathbf{v} \in H^2(\Omega)^3,\ ((\mathbf{w}_j, \mathbf{v}))_2 = \lambda_j(\mathbf{w}_j, \mathbf{v}), \tag{5.25}$$

où $((\ ,\ ))_2$ représente le produit scalaire dans $H^2(\Omega)^3$. La régularité du problème (5.25) implique que $\mathbf{w}_j$ est dans $H^3(\Omega)^3$ pourvu que Γ soit de classe $C^{2,1}$. On va démontrer que, si $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartient à $H^2(\Omega)^3$ et si $\mathbf{u}$ est assez petit dans V_2, la suite $\{\mathbf{z}_m\}_{m\geq 1}$ est bornée dans $H^2(\Omega)^3$. Précisément, on établit le lemme suivant.

Lemme 5.8 *En plus des hypothèses du Lemme 5.2, supposons que* $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ *soit dans* $H^2(\Omega)^3$ *et que* $\mathbf{u}$ *vérifie*

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} \leq \rho, \text{ avec } \rho < \frac{\nu}{4(C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C(\alpha_1)}. \tag{5.26}$$

Alors la solution $\mathbf{z}_m$ *de (5.6) est bornée comme suit:*

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{2}C(\alpha_1)\nu\rho + \alpha_1\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^2(\Omega)}}{\nu - 4(C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C(\alpha_1)\rho}. \tag{5.27}$$

Démonstration. Multipliant les deux membres de (5.6) par $\lambda_j c_{j,m}$, appliquant (5.25) et sommant par rapport à j, on obtient

$$\frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{z}_m\|^2_{H^2(\Omega)} + ((\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_m))_2 - ((\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u}, \mathbf{z}_m))_2 = ((\mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}, \mathbf{z}_m))_2. \tag{5.28}$$

Le seule terme qui pose un problème dans (5.28) est $(\partial^2(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m), \partial^2\mathbf{z}_m)$, car il fait intervenir la dérivée troisième de $\mathbf{z}_m$ qui ne peut pas être contrôlée par les termes positifs du membre de gauche. Développons ce terme:

$$(\partial^2(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m), \partial^2\mathbf{z}_m) = (\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_k}\frac{\partial z_{m,i}}{\partial x_j} + 2\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial^2 z_{m,i}}{\partial x_l \partial x_j} + u_j\frac{\partial^3 z_{m,i}}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}, \frac{\partial^2 z_{m,i}}{\partial x_k \partial x_l}).$$

Mais

$$(u_j\frac{\partial^3 z_{m,i}}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}, \frac{\partial^2 z_{m,i}}{\partial x_k \partial x_l}) = (u_j, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial^2 z_{m,i}}{\partial x_k \partial x_l}.\frac{\partial^2 z_{m,i}}{\partial x_k \partial x_l})) = 0,$$

car $\mathbf{u}$ appartient à V. De là, grâce au Lemme I.3.5 et à (I.2.16), on a

$$|(\partial^2(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m), \partial^2\mathbf{z}_m)| \leq 2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{z}_m|^2_{H^2(\Omega)} + C_2^{3/2}\|\partial^2\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}\|\nabla\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m|_{H^2(\Omega)}.$$

Puis de (I.2.15) et (1.7), on déduit

$$|(\partial^2(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m), \partial^2\mathbf{z}_m)| \leq C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}(2C_1|\mathbf{z}_m|^2_{H^2(\Omega)} + C_2^{3/2}\|\nabla\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m|_{H^2(\Omega)}). \tag{5.29}$$

Ensuite il reste à évaluer $(\partial^2(\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u}), \partial^2\mathbf{z}_m)$. Développons ce terme:

$$(\partial^2(\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u}), \partial^2\mathbf{z}_m) = (\frac{\partial^2 z_{m,j}}{\partial x_l \partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + 2\frac{\partial z_{m,j}}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l} + z_{m,j}\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}, \frac{\partial^2 z_{m,i}}{\partial x_k \partial x_l}).$$

Par la même méthode que pour le terme précédent, on obtient

$$\begin{aligned}|(\partial^2(\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u}), \partial^2\mathbf{z}_m)| \leq{}& C_1 C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}|\mathbf{z}_m|_{H^2(\Omega)}(\|\mathbf{z}_m\|_{H^2(\Omega)} + |\mathbf{z}_m|_{H^2(\Omega)}) \\ &+2C_2^{3/2}C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}\|\nabla\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m|_{H^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Rassembler (5.11) et (5.29) donne

$$|((\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m, \nabla\mathbf{z}_m))_2| \leq (2C_1 + C_2^{3/2})C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}\|\mathbf{z}_m\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

De même (5.12), (5.13) et (5.30) impliquent

$$|((\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{z}_m))_2| \leq (2C_1+3C_2^{3/2})C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}\|\mathbf{z}_m\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

Substituant ces deux dernières inégalités dans (5.28) et simplifiant par $\|\mathbf{z}_m\|_{H^2(\Omega)}$, nous obtenons

$$(\frac{\nu}{\alpha_1}-4(C_1+C_2^{3/2})C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2})\|\mathbf{z}_m\|_{H^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^2(\Omega)}+\frac{\sqrt{2}\nu}{\alpha_1}C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}. \tag{5.31}$$

De là, avec l'hypothèse (5.26), (5.27) suit.
△

Nous sommes en mesure de donner le théorème de majoration H^5 de la solution $\mathbf{u}$ du problème (1.1)-(1.3).

Théorème 5.9 *Soit Ω un ouvert de $I\!R^3$, borné et simplement connexe avec une frontière Γ de classe $C^{4,1}$. Soit $\mathbf{f}$ donné dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire*

$$\frac{\sqrt{2}}{\alpha_1}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\nu^2}{2\alpha_1}\min(\frac{1}{K(\alpha_1)},\frac{1}{4(C_1+C_2^{3/2})\alpha_1C(\alpha_1)}), \tag{5.32}$$

où $K(\alpha_1)$ est définie par (2.8). Si, de plus, $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartient à $H^2(\Omega)^3$, alors l'unique solution $\mathbf{u}$ dans V_2 de (1.1)-(1.3) appartient à $H^5(\Omega)^3$ et on a la majoration

$$\|\mathbf{u}\|_{H^5(\Omega)} \leq \frac{8K_2(\alpha_1)C(\alpha_1)}{\nu L(\alpha_1)}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}+\frac{2\alpha_1K_2(\alpha_1)(1+2\sqrt{2}C(\alpha_1))}{\nu L(\alpha_1)}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^2(\Omega)}, \tag{5.33}$$

où $L(\alpha_1)$ est définie par (3.15) et $K_2(\alpha_1)$ est définie dans le Lemme 5.1.

Démonstration. L'hypothèse (5.32) implique l'existence et l'unicité de la solution $\mathbf{u}$ de (1.1)-(1.3) et on a la majoration $\|\mathbf{u}\|_{V_2} \leq \rho_1(\mathbf{f})$. Considérant l'inégalité (3.36), on a

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} \leq \frac{2\alpha_1}{\nu}|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}. \tag{5.34}$$

De (5.32), on déduit

$$|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < \frac{\nu^2}{8(C_1+C_2^{3/2})\alpha_1^2C(\alpha_1)},$$

ou, de manière équivalente,

$$\frac{2\alpha_1}{\nu}|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < \frac{\nu}{4(C_1+C_2^{3/2})\alpha_1C(\alpha_1)}. \tag{5.35}$$

Grâce à (5.34) et (5.35), on peut appliquer le Lemme 5.8 avec $\rho = \dfrac{2\alpha_1}{\nu}|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$ et obtenir une suite $\{\mathbf{z}_m\}_{m\geq 1}$ bornée dans $H^2(\Omega)^3$. La convergence faible dans $H^2(\Omega)^3$ nous permet de passer à la limite dans (5.6) et d'obtenir une solution $\mathbf{z}$ dans $H^2(\Omega)^3$ du problème (5.5). Sous la condition (5.32), on peut encore appliquer le Lemme 5.6 d'unicité, qui donne

$\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$. De là $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ appartient $H^2(\Omega)^3$ et le Lemme 5.1, avec la régularité $C^{4,1}$ de Γ, implique que $\mathbf{u}$ appartient à $H^5(\Omega)^3$.

Démontrons la majoration (5.33). Reprenons les calculs du Lemme 3.3 :

$$\rho_1(\mathbf{f}) = \frac{2|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}{\frac{\nu}{\alpha_1} + \sqrt{\frac{\nu^2}{\alpha_1^2} - 4C_1C(\alpha_1)|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}}.$$

Substituant (3.14) dans le dénominateur de $\rho_1(\mathbf{f})$, on obtient

$$\rho_1(\mathbf{f}) \leq \frac{2\alpha_1|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}{\nu(1 + \sqrt{1 - \frac{2C_1\alpha_1C(\alpha_1)}{K(\alpha_1)}})}.$$

Mais

$$\sqrt{1 - \frac{2C_1\alpha_1C(\alpha_1)}{K(\alpha_1)}} = L(\alpha_1).$$

D'où

$$\rho_1(\mathbf{f}) \leq \frac{2\alpha_1|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}{\nu(1 + L(\alpha_1))}.$$

De là, avec (5.32) et $\|\mathbf{u}\|_{V_2} \leq \rho_1(\mathbf{f})$, on déduit

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} \leq \frac{\nu}{4(C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1C(\alpha_1)(1 + L(\alpha_1))}.$$

Substituant cette inégalité dans (5.31) et remarquant que $L(\alpha_1) \leq 1$, on a

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{2\alpha_1}{\nu L(\alpha_1)}(\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^2(\Omega)} + \frac{\sqrt{2}\nu}{\alpha_1}C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}).$$

Alors (5.34) implique

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{2\alpha_1}{\nu L(\alpha_1)}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^2(\Omega)} + \frac{4\sqrt{2}\alpha_1C(\alpha_1)}{\nu L(\alpha_1)}|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}.$$

Puis, remplacer $|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$ par son expression, donne

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{8C(\alpha_1)}{\nu L(\alpha_1)}\mathcal{P}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{2\alpha_1(1 + 2\sqrt{2}C(\alpha_1))}{\nu L(\alpha_1)}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^2(\Omega)}.$$

Passant à la limite, on déduit que $\mathbf{z}$ vérifie la même majoration. Remarquant que le Lemme 5.1 implique $\|\mathbf{u}\|_{H^5(\Omega)} \leq K_2(\alpha_1)\|\mathbf{z}\|_{H^2(\Omega)}$, on obtient la majoration (5.33).
$\triangle$

Contrairement à ce qui se passe pour la régularité H^4, la condition sur $\mathbf{f}$ dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, qui assure l'existence et l'unicité de la solution $\mathbf{u}$ dans V_2 du problème (1.1)-(1.3), n'est pas suffisante pour produire, prenant $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ dans $H^2(\Omega)^3$, la régularité H^5. Autrement dit, pour avoir la régularité H^5, on est obligé d'imposer à $\mathbf{f}$ d'être un peu plus petit dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$. Cette situation ne se produit pas dans le cas d'évolution, sans doute à cause de l'effet stabilisant de la dérivée par rapport au temps. Ainsi, ce phénomène de diminution de l'intervalle d'existence, en fonction de la régularité, serait le produit de la non-linéarité, non compensée par un effet stabilisant.

5.4 Régularité: généralisation et solution classique

Par induction, on démontre le résultat suivant.

Théorème 5.10 *Soient un entier $m \geq 2$ et Ω un ouvert de R^3, borné et simplement connexe avec une frontière Γ de classe $C^{m+2,1}$. Supposons que $\mathbf{f}$ soit dans $L^2(\Omega)^3$ et $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ dans $H^m(\Omega)^3$. Il existe deux constantes a_m et b_m telles que, si $\mathbf{f}$ vérifie*

$$a_m \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + b_m \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^{m-2}(\Omega)} < 1, \tag{5.36}$$

alors l'unique solution $\mathbf{u}$ dans V_2 du problème (1.1)-(1.3) appartient à $H^{m+3}(\Omega)^3$. De plus il existe deux constantes c_m et d_m telles que

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq c_m \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + d_m \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^m(\Omega)}. \tag{5.37}$$

Démonstration. Le Théorème 5.9 montre que le théorème est vrai pour $m = 2$ avec

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2\sqrt{2}\mathcal{P}}{\nu^2} \max\left(K(\alpha_1), 4(C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C(\alpha_1)\right), \\ b_2 &= \frac{2\alpha_1}{\nu^2} \max\left(K(\alpha_1), 4(C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C(\alpha_1)\right), \\ c_2 = \frac{8K_2(\alpha_1)C(\alpha_1)\mathcal{P}}{\nu L(\alpha_1)} &\text{ et } d_2 = \frac{2\alpha_1 K_2(\alpha_1)(1 + 2\sqrt{2}C(\alpha_1))}{\nu L(\alpha_1)}. \end{aligned}$$

Supposons le résultat du théorème vrai jusqu'à l'ordre $m-1$, pour $m \geq 3$ et démontrons-le à l'ordre m. Pour commencer, nous supposons la condition (5.23) vérifiée, ce qui implique l' existence et l'unicité de la solution $\mathbf{u}$ dans V_2 du problème (1.1)-(1.3) et l'unicité de la solution $\mathbf{z}$ dans $L^2(\Omega)^3$ du problème (5.5). Remarquons qu'alors $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$. Il nous reste donc à prouver que le problème (5.5) admet une solution $\mathbf{z}$ dans $H^m(\Omega)^3$.

On définit le même problème approché (5.6) que précédemment avec $\mathbf{w}_j$ dans $H^m(\Omega)^3$, fonction propre du problème

$$\forall \mathbf{v} \in H^m(\Omega)^3,\ ((\mathbf{w}_j, \mathbf{v}))_m = \lambda_j (\mathbf{w}_j, \mathbf{v}), \tag{5.38}$$

où $((\ ,\ ))_m$ représente le produit scalaire dans $H^m(\Omega)^3$. La régularité du problème (5.38) implique que $\mathbf{w}_j$ est dans $H^{m+1}(\Omega)^3$, pourvu que Γ soit de classe $C^{m,1}$. Le problème approché s'écrit sous la forme suivante, ayant remplacé la solution approchée $\mathbf{z}_m$ par $\mathbf{z}_p$ afin d'éviter les confusions de notations:

$$\frac{\nu}{\alpha_1}(\mathbf{z}_p, \mathbf{w}_j) + (\mathbf{u}.\nabla \mathbf{z}_p, \mathbf{w}_j) - (\mathbf{z}_p.\nabla \mathbf{u}, \mathbf{w}_j) = (\mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}, \mathbf{w}_j). \tag{5.39}$$

Utilisant la base spéciale définie par (5.38), on obtient

$$\frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)} + ((\mathbf{u}.\nabla \mathbf{z}_p, \mathbf{z}_p))_m - ((\mathbf{z}_p.\nabla \mathbf{u}, \mathbf{z}_p))_m = ((\mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}, \mathbf{z}_p))_m. \tag{5.40}$$

Nous avons déjà majoré $|((\mathbf{u}.\nabla \mathbf{z}_p, \mathbf{z}_p))_m|$ dans le Paragraphe I.7.1, mais il faut ici affiner les majorations. Rappelons que

$$((\mathbf{u}.\nabla \mathbf{z}_p, \mathbf{z}_p))_m = \sum_{\substack{|\alpha+\beta| \leq m \\ |\beta| \leq m-1}} C_{\alpha,\beta}(\partial^\alpha \mathbf{u}.\nabla(\partial^\beta \mathbf{z}_p), \partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p).$$

Il nous faut donc majorer des termes du type $(\partial^\alpha \mathbf{u}.\nabla(\partial^\beta \mathbf{z}_p), \partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p)$, avec

$$|\alpha+\beta| \leq m \text{ et } |\beta| \leq m-1. \tag{5.41}$$

Distinguons les cas $|\alpha| = m$ et $|\alpha| \leq m-1$. D'une part, pour $|\alpha| = m$, considérant que $m \geq 3$, on a, grâce au Lemme I.3.5 et à (I.2.16),

$$\begin{aligned}|(\partial^\alpha \mathbf{u}.\nabla(\partial \mathbf{z}_p), \partial^\alpha \mathbf{z}_p)| &\leq \|\partial^\alpha \mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla \mathbf{z}_p\|_{L^4(\Omega)}\|\partial^\alpha \mathbf{z}_p\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_2^{3/2}\|\mathbf{u}\|_{H^{m+1}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'autre part, pour $|\alpha| \leq m-1$, $|\beta| \leq m-1$ et $|\alpha+\beta| \leq m$, en utilisant le Lemme I.3.5, on a

$$|(\partial^\alpha \mathbf{u}.\nabla(\partial^\beta \mathbf{z}_p), \partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p)| \leq \|\partial^\alpha \mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla(\partial^\beta \mathbf{z}_p\|_{L^2(\Omega)}\|\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors (I.2.13) et (I.2.6), tenant compte des hypothèses sur α et β, impliquent

$$|(\partial^\alpha \mathbf{u}.\nabla(\partial^\beta \mathbf{z}_p), \partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p)| \leq C_1\|\mathbf{u}\|_{H^{m+1}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

Finalement on obtient

$$|((\mathbf{u}.\nabla \mathbf{z}_p, \mathbf{z}_p))_m| \leq C'_m\|\mathbf{u}\|_{H^{m+1}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)}, \tag{5.42}$$

où C'_m est une constante dépendant de m, C_2 et C_1. De même, pour $((\mathbf{z}_p.\nabla \mathbf{u}, \mathbf{z}_p))_m$, on distingue les cas $|\alpha| = m$, $|\beta| = m$, puis $|\alpha| \leq m-1$ et $|\beta| \leq m-1$. En premier lieu, pour $|\alpha| = m$,

$$|(\mathbf{z}_p.\nabla(\partial^\alpha \mathbf{u}), \partial^\alpha \mathbf{z}_p)| \leq \|\mathbf{z}_p\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla(\partial^\alpha \mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}\|\partial^\alpha \mathbf{z}_p\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|\mathbf{u}\|_{H^{m+1}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

Puis, pour $|\beta| = m$, considérant que $m \geq 3$,

$$|(\partial^\beta \mathbf{z}_p.\nabla \mathbf{u}, \partial^\beta \mathbf{z}_p)| \leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial^\beta \mathbf{z}_p\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|\mathbf{u}\|_{H^{m+1}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

Enfin les conditions $|\alpha+\beta| \leq m$, $|\alpha| \leq m-1$ et $|\beta| \leq m-1$ impliquent

$$\begin{aligned}|(\partial^\beta \mathbf{z}_p.\nabla(\partial^\alpha \mathbf{u}), \partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p)| &\leq \|\partial^\beta \mathbf{z}_p\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla(\partial^\alpha \mathbf{u})\|_{L^4(\Omega)}\|\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{z}_p\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_2^{3/2}\|\mathbf{u}\|_{H^{m+1}(\Omega)}\|\mathbf{z}_m\|^2_{H^m(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'où la majoration

$$|((\mathbf{z}_p.\nabla \mathbf{u}, \mathbf{z}_p))_m| \leq C''_m\|\mathbf{u}\|_{H^{m+1}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p\|^2_{H^m(\Omega)}, \tag{5.43}$$

où C''_m est une constante dépendant de m, C_1 et C_2. De plus, grâce au Lemme I.3.3,

$$|((\mathbf{rot}\,\mathbf{u}, \mathbf{z}_p))_m| \leq \sqrt{2}\|\mathbf{u}\|_{H^{m+1}(\Omega)}\|\mathbf{z}_p\|_{H^m(\Omega)}. \tag{5.44}$$

Substituant (5.42), (5.43) et (5.44) dans (5.40) et simplifiant par $\|\mathbf{z}_p\|_{H^m(\Omega)}$, on obtient

$$\left(\frac{\nu}{\alpha_1} - (C'_m + C''_m)\|\mathbf{u}\|_{H^{m+1}(\Omega)}\right)\|\mathbf{z}_p\|_{H^m(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{2}\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^m(\Omega)}. \tag{5.45}$$

On distingue deux cas.

Si $m = 3$, on impose la condition (5.23), que l'on écrit sous la forme

$$a_1\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + b_1\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} < 1,$$

avec

$$a_1 = \frac{2\sqrt{2}\mathcal{P}K(\alpha_1)}{\nu^2} \text{ et } b_1 = \frac{2\alpha_1 K(\alpha_1)}{\nu^2}.$$

Sous cette condition, le Théorème 5.7 donne

$$\|\mathbf{u}\|_{H^4(\Omega)} \leq c_1\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + d_1\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)},$$

avec

$$c_1 = \frac{4\mathcal{P}K(\alpha_1)K_1(\alpha_1)}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}} \text{ et } d_1 = \frac{\alpha_1 K(\alpha_1)K_1(\alpha_1)(1+2\sqrt{2}C(\alpha_1))}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}C(\alpha_1)}.$$

Si $m \geq 4$, on impose la condition

$$a_{m-2}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + b_{m-2}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^{m-4}(\Omega)} < 1. \tag{5.46}$$

Alors nous avons, par hypothèse de récurrence,

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{m+1}(\Omega)} \leq c_{m-2}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + d_{m-2}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^{m-2}(\Omega)}. \tag{5.47}$$

De là, utilisant cette inégalité, qui est aussi vérifiée pour $m = 3$, grâce aux définitions précédentes de c_1 et d_1, (5.45) devient

$$\begin{aligned}(\frac{\nu}{\alpha_1} - (C'_m + C''_m)(c_{m-2}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + d_{m-2}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^{m-2}(\Omega)}))\|\mathbf{z}_p\|_{H^m(\Omega)}\\ \leq \frac{\sqrt{2}\nu}{\alpha_1}(c_{m-2}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + d_{m-2}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^{m-2}(\Omega)}) + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^m(\Omega)}.\end{aligned} \tag{5.48}$$

Imposons enfin la condition

$$c_{m-2}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + d_{m-2}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^{m-2}(\Omega)} < \frac{\nu}{2\alpha_1(C'_m + C''_m)}. \tag{5.49}$$

Alors, on obtient

$$\|\mathbf{z}_p\|_{H^m(\Omega)} \leq 2\sqrt{2}c_{m-2}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + (2\sqrt{2}d_{m-2} + \frac{2\alpha_1}{\nu})\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^m(\Omega)}. \tag{5.50}$$

En conclusion, posons, pour $m \geq 3$,

$$a_m = \sup\,(a_1, a_{m-2}, a_{m-1}, \frac{2}{\nu}\alpha_1(C'_m + C''_m)c_{m-2})$$

et

$$b_m = \sup\,(b_1, b_{m-2}, b_{m-1}, \frac{2}{\nu}\alpha_1(C'_m + C''_m)d_{m-2}).$$

Ces deux suites sont bien définies par les valeurs de départ a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, d_1, c_2 et d_2, données dans le cours de la démonstration. Alors, sous la condition

$$a_m\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + b_m\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^{m-2}(\Omega)} < 1,$$

les trois conditions (5.23), (5.46) et (5.49) sont vérifiées et la suite $\{\mathbf{z}_p\}_{p\geq 1}$ est bornée, uniformément par rapport à p, dans $H^m(\Omega)^3$. Passant à la limite dans l'équation (5.6) par convergence faible dans $H^m(\Omega)^3$, on déduit l'existence d'une solution $\mathbf{z}$ dans $H^m(\Omega)^3$ pour le problème (5.5). Alors $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ appartient à $H^m(\Omega)^3$ et le Lemme 5.1, compte tenu de la régularité de Γ, implique que $\mathbf{u}$ appartient à $H^{m+3}(\Omega)^3$. Par passage à la limite, on obtient que $\mathbf{z}$ vérifie aussi (5.50). Du Lemme 5.1, on déduit que

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq K_m(\alpha_1)\|\mathbf{z}\|_{H^m(\Omega)}.$$

Cette inégalité, avec (5.50), implique (5.37) avec

$$c_m = 2\sqrt{2}c_{m-2}K_m(\alpha_1) \text{ et } d_m = (2\sqrt{2}d_{m-2} + \frac{2\alpha_1}{\nu})K_m(\alpha_1).$$

$\triangle$

Nous ferons une remarque analogue à celle faite à la fin du Paragraphe 5.3. L'existence d'une solution H^m est liée aux deux suites $\{a_m\}$ et $\{b_m\}$. Inopportunément, les suites $\{a_m\}$ et $\{b_m\}$ sont croissantes, ce qui implique que les conditions d'existence des solutions H^m sont de plus en plus restrictives à mesure que m augmente.

Les théorèmes de Sobolev conduisent à l'existence d'une solution classique.

Théorème 5.11 *Sous les hypothèses du Théorème 5.9, le problème (1.1)-(1.3) admet une solution unique* $(\mathbf{u}, p)$ *dans* $C^3(\overline{\Omega})^3 \times (C^1(\overline{\Omega})/\mathbb{R})$.

Démonstration. Le Théorème 5.9 implique l'existence d'une solution unique $\mathbf{u}$ dans $H^5(\Omega)^3$ pour le problème (1.1)-(1.3). L'inclusion continue de $H^5(\Omega)$ dans $C^3(\overline{\Omega})$, donnée par Sobolev, nous donne $\mathbf{u}$ dans $C^3(\overline{\Omega})^3$.

Puisque $\mathbf{f} + \nu\Delta\mathbf{u} - \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u}$ appartient à $H^\perp \cap (H^2(\Omega)^3)$, il existe p dans $H^3(\Omega)$ tel que le couple $(\mathbf{u}, p)$ est solution de (1.1). Alors, de nouveau par Sobolev, p appartient à $C^1(\overline{\Omega})$.

$\triangle$

Chapitre IV
Fluide de grade deux dans le cas stationnaire avec Ω non simplement connexe

1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier le même problème qu'au chapitre précédent, mais dans le cas où Ω n'est pas simplement connexe. Rappelons l'énoncé du problème:

Chercher une fonction à valeurs vectorielles $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et une fonction scalaire p définies dans Ω, solution de :

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \tag{1.1}$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega, \tag{1.2}$$

avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{sur} \quad \Gamma. \tag{1.3}$$

Rappelons quelques définitions et résultats obtenus dans le Chapitre II.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ avec Γ au moins de classe $C^{1,1}$. Soit l'opérateur P de projection de Helmholtz. Alors il existe une constante $C_1(\alpha_1)$ telle que

$$\forall \mathbf{v} \in V \cap H^2(\Omega)^3 \ , \ \|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1(\alpha_1)\|P(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.4}$$

On introduit de nouveau l'espace

$$V_2 = \{\mathbf{v} \in V \cap H^2(\Omega)^3; \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)^3\}.$$

On munit V_2 du produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_2} = (P(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}), P(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v})) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}), \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v})) \tag{1.5}$$

et de la norme associée

$$\|\mathbf{v}\|_{V_2} = (\mathbf{v}, \mathbf{v})_{V_2}^{1/2}. \tag{1.6}$$

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, avec une frontière Γ de classe $C^{2,1}$. On rappelle (cf. Paragraphes II.1 et II.2) le résultat fondamental suivant: l'espace V_2 est inclus dans $H^3(\Omega)^3$ et il existe une constante $C_2(\alpha_1)$ telle que

$$\forall \mathbf{v} \in V_2,\ \|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)} \leq C_2(\alpha_1)\|\mathbf{v}\|_{V_2}. \tag{1.7}$$

Le chapitre s'organise comme suit. Au Paragraphe 2, nous démontrons l'existence de solution, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données, sous l'hypothèse $\mathbf{f}$ assez petit dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$. Le Paragraphe 3 est consacré à la régularité de la solution.

2 Existence, unicité et dépendance continue par rapport aux données

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, avec une frontière Γ de classe $C^{2,1}$. On suppose $\mathbf{f}$ dans $L^2(\Omega)^3$ et on utilise la même base spéciale $\{\mathbf{w}_j\}$ qu'au Paragraphe II.3. Avec cette base, le problème approché du problème (1.1)-(1.3) est défini par l'équation (III.2.2). Alors, par une démonstration identique à celle du Lemme III.2.1, nous montrons que le problème approché, sous les hypothèses précédentes sur Ω et $\mathbf{f}$, admet une solution $\mathbf{u}_m$ dans $H^1(\Omega)^3$, qui vérifie

$$|\mathbf{u}_m|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\mathcal{P}}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.1}$$

Le lemme suivant, qui est l'analogue du Lemme III.2.2, concerne la dépendance continue de la solution $\mathbf{u}_m$ par rapport à la donnée $\mathbf{f}$.

Lemme 2.1 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, avec une frontière Γ de classe $C^{2,1}$. Pour $i = 1, 2$, on note $\mathbf{u}_{m,i}$ une solution du problème (III.2.2) avec $\mathbf{f}_i \in L^2(\Omega)^3$ comme second membre. Si $\mathbf{u}_{m,2}$ vérifie*

$$\|\mathbf{u}_{m,2}\|_{V_2} \leq \rho,\ \text{avec } \rho < \frac{\nu}{K(\alpha_1)}, \tag{2.2}$$

où

$$K(\alpha_1) = (2\alpha_1 C_1 + (\alpha_1+1)\sqrt{\mathcal{P}^2+1}\,C_2^{3/2})C_2(\alpha_1), \tag{2.3}$$

alors on a l'inégalité

$$|\mathbf{u}_{m,2} - \mathbf{u}_{m,1}|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\mathcal{P}}{\nu - \rho K(\alpha_1)}\|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.4}$$

Démonstration. La démonstation du Lemme III.2.2 s'applique ici avec, comme seule modification, le remplacement de $C(\alpha_1)$ par $C_2(\alpha_1)$ définie par (1.7).
$\triangle$

On suppose maintenant que Γ est de classe $C^{3,1}$. On définit de nouveau la fonction $\mathbf{F}$ par (III.3.1) et on considére une solution $\mathbf{u}_m$ du problème (III.2.2). Grâce au Lemme II.3.2, $\mathbf{F}(\mathbf{u}_m)$ appartient à $H^1(\Omega)^3$. On définit $\mathbf{v}_m$ comme dans le Paragraphe III.3.1 et on est conduit, par la même méthode, à la même équation

$$(\mathbf{v}_m, \mathbf{u}_m)_{V_2} = 0.$$

Avec la définition du produit scalaire dans V_2, cela donne

$$\begin{aligned}(\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{u}_m), \mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m)) + (P(\mathbf{F}(\mathbf{u}_m)), P(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m))\\ = (\mathbf{rot}\,\mathbf{f}, \mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m)) + (P(\mathbf{f}), P(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m)).\end{aligned} \tag{2.5}$$

On rappelle l'égalité

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{u}_m) = -\nu\Delta\mathbf{rot}\,\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_m.\nabla\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m) - \mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m).\nabla\,\mathbf{u}_m.$$

En substituant cette égalité dans (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}^2 + (P(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m) \times \mathbf{u}_m), P(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m))\\ &-b(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m); \mathbf{u}_m, \mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m)) = \frac{\nu}{\alpha_1}(\mathbf{rot}\,\mathbf{u}_m, \mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m))\\ &+\frac{\nu}{\alpha_1}(\mathbf{u}_m, P(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m)) + (\mathbf{rot}\,\mathbf{f}, \mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m)) + (P(\mathbf{f}), P(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m)).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Effectuons deux majorations dans le membre de gauche de (2.6). Le Lemme I.3.4 avec (I.2.13) et (1.4) implique

$$\begin{aligned}|(P(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m) \times \mathbf{u}_m), P(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m))|\\ \leq C_1C_1(\alpha_1)\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}\|P(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m)\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Le Lemme I.3.5, (I.2.15) et (1.7) donnent

$$\begin{aligned}|b(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m); \mathbf{u}_m, \mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m))|\\ \leq C_1C_2(\alpha_1)\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}\|\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_m)\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Substituant les inégalités (2.7) et (2.8) dans (2.6) et simplifiant par $\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}$, on obtient

$$\frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq C_1\max(C_2(\alpha_1), C_1(\alpha_1))\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}^2 + \|\mathbf{f}\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}_m\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)}. \tag{2.9}$$

Mais l'inégalité de Poincaré et (2.1) impliquent

$$\|\mathbf{u}_m\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \leq \sqrt{\mathcal{P}^2+2}|\mathbf{u}_m|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2}}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.10}$$

Posons

$$|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} = (1 + \frac{\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2}}{\alpha_1})\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.11}$$

et

$$M(\alpha_1) = \max(C_2(\alpha_1), C_1(\alpha_1)). \tag{2.12}$$

Utilisant (2.10) et les notations précédentes, l'inégalité (2.9) implique

$$C_1M(\alpha_1)\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}^2 - \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} + |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \geq 0. \tag{2.13}$$

Cette inégalité est vérifiée par toute solution $\mathbf{u}_m$ du problème (III.2.2). Elle est du même type que l'inégalité (III.3.8), la seule différence est qu'il y a $M(\alpha_1)$ à la place de $C(\alpha_1)$. La démonstation du Lemme III.3.1 s'applique ici, il suffit de remplacer $C(\alpha_1)$ par $M(\alpha_1)$. Ainsi, nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 2.2 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Soit $\mathbf{f}$ donné dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire*

$$|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < \frac{\nu^2}{4C_1\alpha_1^2 M(\alpha_1)}, \tag{2.14}$$

où $|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$ est défini par (2.11) et $M(\alpha_1)$ par (2.12). Alors toute solution $\mathbf{u}_m$ du problème (III.2.2) est telle que

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \text{ appartient à } [0, \rho_1(\mathbf{f})] \cup [\rho_2(\mathbf{f}), +\infty[, \tag{2.15}$$

où

$$\rho_1(\mathbf{f}) = \frac{\frac{\nu}{\alpha_1} - \sqrt{\frac{\nu^2}{\alpha_1^2} - 4C_1 M(\alpha_1)|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}}{2C_1 M(\alpha_1)}$$

et

$$\rho_2(\mathbf{f}) = \frac{\frac{\nu}{\alpha_1} + \sqrt{\frac{\nu^2}{\alpha_1^2} - 4C_1 M(\alpha_1)|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}}{2C_1 M(\alpha_1)}.$$

Remarquons que le Lemme III.3.2 reste inchangé avec ce nouvel espace V_2 et la relation (III.3.12) est encore vérifiée. Nous allons maintenant établir un lemme technique, analogue au Lemme III.3.3.

Lemme 2.3 *Soient $K(\alpha_1)$ définie par (2.3), $M(\alpha_1)$ par (2.12), $|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$ par (2.11) et $\rho_1(\mathbf{f})$ défini dans le Lemme 2.2. Si on a*

$$|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \leq r_1 < r_2 \leq \frac{\nu^2}{2\alpha_1} \min\left(\frac{1}{K(\alpha_1)}, \frac{1}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)}\right), \tag{2.16}$$

alors $\rho_1(\mathbf{f})$ et $\dfrac{1}{\nu - K(\alpha_1)\rho_1(\mathbf{f})}$ satisfont les inégalités suivantes:

$$\rho_1(\mathbf{f}) \leq \frac{\nu\sqrt{r_2}}{K(\alpha_1)(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_2 - r_1})} < \frac{\nu}{K(\alpha_1)}\ ,\ \rho_1(\mathbf{f}) \leq \frac{\nu\sqrt{r_2}}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_2 - r_1})}$$

et

$$\frac{1}{\nu - K(\alpha_1)\rho_1(\mathbf{f})} \leq \frac{2\sqrt{r_2}}{\nu\sqrt{r_2 - r_1}}.$$

Démonstration. L'hypothèse sur $\mathbf{f}$ implique

$$|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < \frac{\nu^2}{4C_1\alpha_1^2 M(\alpha_1)},$$

donc $\rho_1(\mathbf{f})$ a un sens. En utilisant la forme conjuguée du numérateur de $\rho_1(\mathbf{f})$ et en simplifiant, on déduit

$$\rho_1(\mathbf{f}) = \frac{2|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}{\frac{\nu}{\alpha_1} + \sqrt{\frac{\nu^2}{\alpha_1^2} - 4C_1 M(\alpha_1)|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}},$$

puis,

$$\rho_1(\mathbf{f}) = \frac{2\alpha_1 |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}{\nu(1+\sqrt{1-\frac{4C_1\alpha_1^2 M(\alpha_1)|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}{\nu^2}})}.$$

Mais la condition (2.16) implique

$$\frac{4C_1\alpha_1^2 M(\alpha_1)|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}{\nu^2} \leq \frac{r_1}{r_2}.$$

D'où

$$\rho_1(\mathbf{f}) \leq \frac{2\alpha_1 |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}{\nu(1+\sqrt{1-\frac{r_1}{r_2}}}.$$

Cette inégalité, avec $|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \leq \dfrac{\nu^2}{2\alpha_1 K(\alpha_1)}$, implique les deux premières inégalités et, avec $|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < \dfrac{\nu^2}{4C_1\alpha_1^2 M(\alpha_1)}$, implique la troisième. Enfin, on déduit

$$\nu - K(\alpha_1)\rho_1(\mathbf{f}) \geq \frac{\nu\sqrt{r_2 - r_1}}{\sqrt{r_2}+\sqrt{r_2-r_1}},$$

ce qui implique la dernière inégalité.
$\triangle$

On note encore $B_{V_2}(R)$, la boule dans V_2, fermée, de centre O et de rayon R et, pour tout $\mathbf{f}$ dans $L^2(\Omega)^3$, on note $S_m(\mathbf{f})$, l'ensemble des solutions $\mathbf{u}_m$ du problème (III.2.2) avec $\mathbf{f}$ pour second membre. On a vu que $S_m(\mathbf{f})$ n'est pas l'ensemble vide. Enfin on définit l'ensemble suivant:

$$E_m = \{r \in]0, +\infty[; |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \leq r \Longrightarrow S_m(\mathbf{f}) \subset B_{V_2}(\nu/(2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)))\}.$$

Lemme 2.4 *L'ensemble E_m est un intervalle non vide. Il est ouvert à gauche et son extrémité inférieure est* 0.

Démonstration. Soit $\mathbf{u}_m$ appartenant à $S_m(\mathbf{f})$. Utilisant (2.1) et (III.3.12), on déduit

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \frac{\mathcal{P}\sqrt{(\mathcal{P}^2+\alpha_1)\lambda_m}}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mais

$$\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2}}|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}. \tag{2.17}$$

D'où

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \frac{\alpha_1\mathcal{P}\sqrt{(\mathcal{P}^2+\alpha_1)\lambda_m}}{\nu(\alpha_1+\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})}|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}.$$

De là

$$r = \frac{\nu^2(\alpha_1+\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})}{2C_1\mathcal{P}\sqrt{(\mathcal{P}^2+\alpha_1)\lambda_m}\alpha_1^2 M(\alpha_1)} \in E_m$$

et l'ensemble E_m n'est pas vide. La suite de la démonstration est la même que celle du Lemme III.3.4.
$\triangle$

Nous allons établir un théorème, analogue au Théorème III.3.5, qui donne une majoration dans V_2 de toute solution $\mathbf{u}_m$ du problème approché (III.2.2).

Théorème 2.5 *Soit Ω un domaine borné de $I\!R^3$, avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Soit $\mathbf{f}$ donné dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire*

$$(1+\frac{\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2}}{\alpha_1})\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}<\frac{\nu^2}{2\alpha_1}\min(\frac{1}{K(\alpha_1)},\frac{1}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)}),\tag{2.18}$$

où $K(\alpha_1)$ est définie par (2.3) et $M(\alpha_1)$ par (2.12). Soit $m\geq 1$. Alors toute solution $\mathbf{u}_m$ du problème (III.2.2) satisfait la majoration:

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2}\leq\frac{\frac{\nu}{\alpha_1}-\sqrt{\frac{\nu^2}{\alpha_1^2}-4C_1M(\alpha_1)((1+\frac{\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2}}{\alpha_1})\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)})}}{2C_1M(\alpha_1)}.\tag{2.19}$$

Démonstration. La démonstration s'effectue en plusieurs étapes. On pose

$$r^*=\frac{\nu^2}{2\alpha_1}\min(\frac{1}{K(\alpha_1)},\frac{1}{2C_1\alpha_1M(\alpha_1)})\text{ et }r_m=\sup E_m.$$

Utilisant (2.11) et la notation r^* précédente, on peut remarquer que (2.18) s'écrit

$$|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}<r^*.$$

Nous allons montrer, par contradiction, que, pour tout $m\geq 1$, on a $r_m\geq r^*$. Supposons qu'il existe $m_0\geq 1$, tel que

$$r_{m_0}<r^*.\tag{2.20}$$

La méthode de démonstration est la même que celle du Théorème III.3.5 : on construit encore deux fonctions $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}_2$, qui ont les mêmes propriétés que dans le chapitre précédent et on doit choisir ε assez petit pour obtenir la contradiction.
1$^{\text{ère}}$étape. Construction de $\mathbf{f}_1$.

Soit ε tel que

$$0<\frac{\varepsilon}{2}<r^*-r_{m_0}\text{ et }\frac{\varepsilon}{2}<r_{m_0}.\tag{2.21}$$

Notons que l'on imposera encore une autre condition à ε pour aboutir à la contradiction. Par définition du sup, il existe $\mathbf{f}_1\in H(\mathbf{rot};\Omega)$ et $\mathbf{u}_{m_0,1}\in S_{m_0}(\mathbf{f}_1)$ tels que

$$r_{m_0}<|||\mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}<r_{m_0}+\frac{\varepsilon}{2}\text{ et }\|\mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2}>\frac{\nu}{2C_1\alpha_1M(\alpha_1)}.\tag{2.22}$$

De (2.21) et (2.22), on déduit

$$|||\mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}<r_{m_0}+\frac{\varepsilon}{2}<r^*\leq\frac{\nu^2}{4C_1\alpha_1^2M(\alpha_1)}.$$

On applique alors le Lemme 2.2 et on obtient que

$$\|\mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} \text{ appartient à } [0, \rho_1(\mathbf{f}_1)] \cap [\rho_2(\mathbf{f}_1), +\infty[.$$

Mais (2.22) implique

$$\|\mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} > \frac{\nu}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)} \geq \rho_1(f_1).$$

Donc $\|\mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2}$ appartient à $[\rho_2(\mathbf{f}_1), +\infty[$, soit

$$\|\mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} \geq \rho_2(\mathbf{f}_1). \tag{2.23}$$

2$^{\text{ème}}$étape. Construction de $\mathbf{f}_2$.

Elle s'effectue pratiquement de la même façon que dans la démonstration du Théorème III.3.5. Nous avons encore

$$\frac{r_{m_0} - \varepsilon/2}{r_{m_0}} < k < \frac{r_{m_0}}{r_{m_0} + \varepsilon/2}, \tag{2.24}$$

$$r_{m_0} - \varepsilon/2 < |||\mathbf{f}_2|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < r_{m_0}, \tag{2.25}$$

$$\text{et} \qquad \|\mathbf{u}_{m_0,2}\|_{V_2} \leq \frac{\nu}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)}. \tag{2.26}$$

Puis, de (2.25) et (2.20), il suit que

$$|||\mathbf{f}_2|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < r_{m_0} < r^*. \tag{2.27}$$

De là, grâce au Lemme 2.2, on déduit que

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2}\|_{V_2} \text{ appartient à } [0, \rho_1(\mathbf{f}_2)] \cap [\rho_2(\mathbf{f}_2), +\infty[.$$

Mais (2.26) et l'inégalité $\dfrac{\nu}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)} < \rho_2(\mathbf{f}_2)$ impliquent que $\|\mathbf{u}_{m_0,2}\|_{V_2}$ n'appartient pas à $[\rho_2(\mathbf{f}_2), +\infty[$. Nous pouvons donc conclure que

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2}\|_{V_2} < \rho_1(\mathbf{f}_2). \tag{2.28}$$

3$^{\text{ème}}$étape. Majoration de $\|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2}$.

On applique le Lemme 2.3 avec $r_1 = r_{m_0}$ et $r_2 = r^*$. On déduit

$$\rho_1(\mathbf{f}_2) < \frac{\nu}{K(\alpha_1)}.$$

De là, avec (2.28), par application du Lemme 2.1, on obtient

$$|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\mathcal{P}}{\nu - \rho_1(\mathbf{f}_2)K(\alpha_1)} \|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors le Lemme III.3.2 et (2.17) donnent

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} \leq \frac{\mathcal{P}\alpha_1\sqrt{(\mathcal{P}^2 + \alpha_1)\lambda_{m_0}}}{(\nu - \rho_1(\mathbf{f}_2)K(\alpha_1))(\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2 + 2})} |||\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}. \tag{2.29}$$

Par construction de $\mathbf{f}_2$ et du fait que $k < 1$, on a $|||\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} = (1-k)|||\mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$. Alors (2.22) et (2.24) impliquent

$$|||\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2\, r_{m_0}}(r_{m_0} + \varepsilon/2)$$

et, avec (2.21), cela devient

$$|||\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{2.30}$$

Enfin le Lemme 2.3, avec $r_1 = r_{m_0}$ et $r_2 = r^*$, donne

$$\frac{1}{\nu - K(\alpha_1)\rho_1(\mathbf{f}_2)} \leq \frac{2\sqrt{r^*}}{\nu\sqrt{r^* - r_{m_0}}}. \tag{2.31}$$

Rassemblant les inégalités (2.30) et (2.31) et les substituant dans (2.29), nous obtenons

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} \leq \frac{2\mathcal{P}\alpha_1\sqrt{(\mathcal{P}^2+\alpha_1)\lambda_{m_0} r^*}}{\nu\sqrt{r^* - r_{m_0}}(\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})}\varepsilon. \tag{2.32}$$

4$^{\text{ème}}$étape. Conclusion.

Les inégalités (2.23) et (2.28) et l'inégalité triangulaire impliquent

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} \geq |\, \|\mathbf{u}_{m_0,2}\|_{V_2} - \|\mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2}| \geq \rho_2(\mathbf{f}_1) - \rho_1(\mathbf{f}_2). \tag{2.33}$$

Grâce à (2.27), on applique le Lemme 2.3 avec $r_1 = r_{m_0}$ et $r_2 = r^*$. Cela donne

$$\rho_1(\mathbf{f}_2) \leq \frac{\nu\sqrt{r^*}}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)(\sqrt{r^*} + \sqrt{r^* - r_{m_0}})}.$$

Considérant que

$$\rho_2(\mathbf{f}_1) \geq \frac{\nu}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)},$$

on déduit

$$\rho_2(\mathbf{f}_1) - \rho_1(\mathbf{f}_2) \geq \frac{\nu}{4C_1\alpha_1 M(\alpha_1)}\sqrt{\frac{r^* - r_{m_0}}{r^*}}. \tag{2.34}$$

Alors (2.33) et (2.34) impliquent

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} \geq \frac{\nu}{4C_1\alpha_1 M(\alpha_1)}\sqrt{\frac{r^* - r_{m_0}}{r^*}}. \tag{2.35}$$

De (2.32) et (2.35), il suit que, pour obtenir la contradiction, c'est-à-dire

$$\|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2} < \|\mathbf{u}_{m_0,2} - \mathbf{u}_{m_0,1}\|_{V_2},$$

il faut que ε vérifie, en plus de (2.21), la condition

$$\varepsilon < \frac{\nu^2(r^* - r_{m_0})(\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})}{8C_1 r^*\mathcal{P}\alpha_1^2 M(\alpha_1)\sqrt{(\mathcal{P}^2+\alpha_1)\lambda_{m_0}}}. \tag{2.36}$$

Finalement, nous avons la contradiction en choisissant ε tel que

$$0 < \varepsilon < \min(2\,r_{m_0}, 2(r^* - r_{m_0}), \frac{\nu^2(r^* - r_{m_0})(\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})}{8C_1 r^* \mathcal{P}\alpha_1^2 M(\alpha_1)\sqrt{(\mathcal{P}^2+\alpha_1)\lambda_{m_0}}}).$$

Ainsi, pour tout $m \geq 1$, on a $r_m \geq r^*$. Mais, par définition de $|||\ \ |||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$ et r^*, l'hypothèse (2.18) du théorème s'écrit

$$|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < r^*.$$

Puisque, pour tout $m \geq 1$, on a $r = |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < r_m$, on déduit que

$$r = |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \in E_m, \text{ pour tout } m \geq 1.$$

Par définition de E_m, nous obtenons que toute solution $\mathbf{u}_m$ de (III.2.2) vérifie

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \frac{\nu}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)}.$$

Alors le Lemme 2.2 implique

$$\|\mathbf{u}_m\|_{v_2} \leq \rho_1(\mathbf{f}),$$

ce qui est la conclusion du théorème.
$\triangle$

On montre, en utilisant la forme conjuguée du numérateur de $\rho_1(\mathbf{f})$, que

$$\rho_1(\mathbf{f}) \leq \frac{2(\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.37}$$

Donc, sous les hypothèses du Théorème 2.5, nous avons une majoration, plus simple mais moins bonne:

$$\|\mathbf{u}_m\|_{V_2} \leq \frac{2(\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour $\mathbf{f}$ assez petit dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, comme dans le chapitre précédent, on est en mesure de montrer que le problème (1.1)-(1.3) admet une solution dans $V_2 \times H^1(\Omega)$. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 2.6 *Sous les hypothèses du Théorème 2.5, le problème (1.1)-(1.3) admet une solution* $(\mathbf{u}, p)$ *dans* $V_2 \times H^1(\Omega)$. *De plus* $\mathbf{u}$ *satisfait la borne supérieure:*

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} \leq \frac{\frac{\nu}{\alpha_1} - \sqrt{\frac{\nu^2}{\alpha_1^2} - 4C_1 M(\alpha_1)((1 + \frac{\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2}}{\alpha_1})\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)})}}{2C_1 M(\alpha_1)}. \tag{2.38}$$

Démonstration. Elle est identique à celle du Théorème III.4.1.
$\triangle$

On a aussi un théorème d'unicité dont la démonstration suit celle du Théorème III.4.2, si on remarque que, sous la condition (2.18), le Lemme 2.3 s'applique avec

$$r_1 = |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \text{ et } r_2 = \frac{\nu^2}{2\alpha_1}\min(\frac{1}{K(\alpha_1)}, \frac{1}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)}).$$

Théorème 2.7 *Sous les hypothèses du Théorème 2.5, le problème (1.1)-(1.3) admet une solution unique dans V_2. De plus cette solution vérifie la majoration (2.38).*

Grâce aux théorèmes précédents, nous démontrons un théorème de continuité des solutions du problème (1.1)-(1.3) par rapport aux données.

Théorème 2.8 *Soit Ω un domaine borné de $I\!R^3$, avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Pour $i = 1, 2$, soit $\mathbf{f}_i$ donné dans $H(\mathbf{rot}; \Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire*

$$(1 + \frac{\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2 + 2}}{\alpha_1})\|\mathbf{f}_i\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}_i\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\nu^2}{2\alpha_1} \min(\frac{1}{K(\alpha_1)}, \frac{1}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)}), \tag{2.39}$$

où $K(\alpha_1)$ est définie par (2.3) et $M(\alpha_1)$ par (2.12). Alors, pour $i = 1, 2$, on a

$$\nu - \rho_1(\mathbf{f}_i)K(\alpha_1) > 0$$

et si $\mathbf{u}_i$ est la solution du problème (1.1)-(1.3), associée au second membre $\mathbf{f}_i$, on a la majoration:

$$|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\mathcal{P}}{\nu - \rho_1(\mathbf{f}_2)K(\alpha_1)}\|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.40}$$

Démonstration. Comme dans la démonstration du Théorème III.4.3, on montre que

$$\nu|\mathbf{U}|^2_{H^1(\Omega)} \leq K(\alpha_1)\rho_1(\mathbf{f}_2)|\mathbf{U}|^2_{H^1(\Omega)} + \mathcal{P}\|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|_{L^2(\Omega)}|\mathbf{U}|_{H^1(\Omega)}.$$

On applique alors le Lemme 2.3 avec

$$r_1 = |||\mathbf{f}_2|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \text{ et } r_2 = \frac{\nu^2}{2\alpha_1} \min(\frac{1}{K(\alpha_1)}, \frac{1}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)}),$$

ce qui donne la conclusion.
△

Ce dernier résultat est moins bon que celui du Théorème III.4.3. Cependant, si on impose

$$(1 + \frac{\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2 + 2}}{\alpha_1})\|\mathbf{f}_2\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}_2\|_{L^2(\Omega)} \leq r < \frac{\nu^2}{2\alpha_1} \min(\frac{1}{K(\alpha_1)}, \frac{1}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)}) = r^*,$$

alors le Lemme 2.3 implique

$$|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2\mathcal{P}\sqrt{r^*}}{\nu\sqrt{r^* - r}}\|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|_{L^2(\Omega)},$$

qui est une inégalité analogue à (III.4.8).

Dans le cas très plausible, où $C_1(\alpha_1) \leq C_2(\alpha_1)$, la condition (2.18) s'écrit plus simplement:

$$(1 + \frac{\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2 + 2}}{\alpha_1})\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\nu^2}{2\alpha_1 K(\alpha_1)}.$$

Cela implique que les résultats obtenus dans le cas Ω non simplement connexe se présentent presque sous la même forme que dans le cas Ω simplement connexe, la seule différence étant $C(\alpha_1)$ remplacée par $C_2(\alpha_1)$.

3 Régularité, solution classique

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, avec une frontière Γ au moins de classe $C^{3,1}$. On suppose $\mathbf{f}$ dans $L^2(\Omega)^3$ et $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ dans $H^m(\Omega)^3$, avec $m \geq 1$. On fait l'hypothèse que le problème (1.1)-(1.3) a une solution $\mathbf{u}$ dans V_2. Comme au Paragraphe III.5, on est amené à résoudre:

Pour $\mathbf{u}$ donné dans V_2, $\mathbf{f}$ donné dans $L^2(\Omega)^3$ avec $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ dans $H^m(\Omega)^3$, chercher $\mathbf{z}$ dans $H^m(\Omega)^3$ solution de:

$$\frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{z} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{z} - \mathbf{z}.\nabla\mathbf{u} = \mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}. \tag{3.1}$$

Pour obtenir un résultat général de régularité, nous avons besoin d'une inégalité analogue à (III.5.1). Dans ce but, reprenons la démonstration du Lemme II.3.1. On a

$$\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v} - \nabla\pi = P(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v}). \tag{3.2}$$

On suppose que Γ est de classe $C^{m+2,1}$ et $\mathbf{v} \in V_2$ avec $\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v}) \in H^m(\Omega)^3$. Alors $\mathbf{rot}(P(\mathbf{v}-\alpha_1\Delta\mathbf{v})) = \mathbf{rot}(\mathbf{v}-\alpha_1\Delta\mathbf{v}) \in H^m(\Omega)^3$. De plus, $\operatorname{div}(P(\mathbf{v}-\alpha_1\Delta\mathbf{v})) = 0 \in H^m(\Omega)$ et $P(\mathbf{v}-\alpha_1\Delta\mathbf{v}).\mathbf{n} = 0 \in H^{m+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. De là, compte tenu de la régularité de Γ, le Théorème II.1.9 implique que

$$P(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v}) \text{ appartient à } H^{m+1}(\Omega)^3$$

et, il existe une constante C_m telle que

$$\|P(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v})\|_{H^{m+1}(\Omega)} \leq C_m(\|P(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v})\|_{H^m(\Omega)}).$$

Mais, du problème de Stokes (3.2), on déduit

$$\|\mathbf{v}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq C'_m(\alpha_1)\|P(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v})\|_{H^{m+1}(\Omega)},$$

d'où, sous les hypothèses du Lemme II.3.1,

$$\|\mathbf{v}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq K_m(\alpha_1)(\|P(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1\Delta\mathbf{v})\|_{H^m(\Omega)}), \tag{3.3}$$

avec $K_m(\alpha_1) = C_m\, C'_m(\alpha_1)$.

On considère $m = 1$, c'est-à-dire que l'on suppose $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ dans $H^1(\Omega)^3$. Pour construire une solution dans $H^1(\Omega)^3$ de (3.1), on utilise le problème approché (III.5.6). On a un lemme, dont la démonstration est celle du Lemme III.5.2, à ceci près qu'il faut remplacer $C(\alpha_1)$ par $C_2(\alpha_1)$.

Lemme 3.1 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Si $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ est dans $L^2(\Omega)^3$ et si $\mathbf{u}$ est dans V_2 assez petit pour vérifier*

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} < \frac{\nu}{C_1\alpha_1 C_2(\alpha_1)},$$

alors le problème (III.5.6) admet une solution $\mathbf{z}_m$ unique dans $H^1(\Omega)^3$.

Comme dans le chapitre précédent, pour passer à la limite dans (III.5.6), il suffit de montrer que la solution $\mathbf{z}_m$ est bornée dans $H^1(\Omega)^3$. La démonstration est presque identique, il suffit de remplacer $C(\alpha_1)$ par $C_2(\alpha_1)$.

Lemme 3.2 *En plus des hypothèses du Lemme 3.1, supposons que* $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ *soit dans* $H^1(\Omega)^3$ *et que* $\mathbf{u}$ *vérifie*

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} < \frac{\nu}{(2C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C_2(\alpha_1)}. \tag{3.4}$$

Alors la solution $\mathbf{z}_m$ *de (III.5.6) est bornée comme suit dans* $H^1(\Omega)^3$*:*

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{2}C_2(\alpha_1)\nu\|\mathbf{u}\|_{V_2} + \alpha_1\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)}}{\nu - (2C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C_2(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}}. \tag{3.5}$$

Le lemme suivant donne l'existence de solution dans $H^1(\Omega)^3$ pour le problème (3.1).

Lemme 3.3 *En plus des hypothèses du Théorème 2.5, supposons que* $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ *appartienne à* $H^1(\Omega)^3$*. Alors le problème (3.1) admet une solution dans* $H^1(\Omega)^3$*.*

Démonstration. Les hypothèses impliquent l'existence et l'unicité d'une solution $\mathbf{u}$ de (1.1)-(1.3). De plus, appliquons le Lemme 2.3 avec

$$r_1 = |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \text{ et } r_2 = \frac{\nu^2}{2\alpha_1}\min\left(\frac{1}{K(\alpha_1)}, \frac{1}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)}\right).$$

Nous déduisons

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} \leq \rho_1(\mathbf{f}) < \frac{\nu}{K(\alpha_1)} < \frac{\nu}{(2C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C_2(\alpha_1)} < \frac{\nu}{C_1\alpha_1 C_2(\alpha_1)}.$$

On peut donc appliquer les Lemmes 3.1 et 3.2 qui donnent l'existence d'une solution unique $\mathbf{z}_m$ du problème (III.5.6), vérifiant la majoration (3.5). De là, substituer l'inégalité $\|\mathbf{u}\|_{V_2} < \dfrac{\nu}{K(\alpha_1)}$ dans le dénominateur du second membre de (3.5) et utiliser l'expression de $K(\alpha_1)$, conduisent à la majoration, pour tout $m \geq 1$,

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{2}C_2(\alpha_1)\nu K(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2} + \alpha_1 K(\alpha_1)\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)}}{\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}C_2(\alpha_1)\nu}. \tag{3.6}$$

Puisque $\|\mathbf{u}\|_{V_2}$ est borné, il découle de (3.6) que la suite $\{\mathbf{z}_m\}$ est uniformément bornée par rapport à m dans $H^1(\Omega)^3$. De là, il existe une fonction $\mathbf{z}$ dans $H^1(\Omega)^3$ et une sous-suite de $\{\mathbf{z}_m\}$, encore notée $\{\mathbf{z}_m\}$, telles que

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{z}_m = \mathbf{z} \quad \text{dans } H^1(\Omega)^3 \text{ faible.}$$

Enfin cette fonction $\mathbf{z}$ satisfait (3.1).
$\triangle$

Par les mêmes arguments qu'au Paragraphe III.3.5, $C_2(\alpha_1)$ remplaçant $C(\alpha_1)$, on montre l'unicité de la solution dans $L^2(\Omega)^3$ du problème (3.1), sous l'hypothèse (3.4) et les hypothèses sur Ω et Γ du Lemme 3.1. On peut alors établir le théorème de régularité H^4 de la solution $\mathbf{u}$ du problème (1.1)-(1.3).

Théorème 3.4 *Soit Ω un domaine borné de $I\!R^3$, avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Soit* $\mathbf{f}$ *donné dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire*

$$(1+\frac{\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2}}{\alpha_1})\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}<\frac{\nu^2}{2\alpha_1}\min(\frac{1}{K(\alpha_1)},\frac{1}{2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)}), \tag{3.7}$$

où $K(\alpha_1)$ est définie par (2.3) et $M(\alpha_1)$ par (2.12). Si, de plus, $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ *appartient à $H^1(\Omega)^3$, alors l'unique solution* $\mathbf{u}$ *dans V_2 de (1.1)-(1.3) appartient à $H^4(\Omega)^3$ et on a la majoration*

$$\|\mathbf{u}\|_{H^4(\Omega)}\leq\frac{2K_1(\alpha_1)(\alpha_1+\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})(\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}+\sqrt{2}K(\alpha_1))}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+\frac{\alpha_1K_1(\alpha_1)[2\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}C_2(\alpha_1)+K(\alpha_1)(1+2\sqrt{2}C_2(\alpha_1))]}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}C_2(\alpha_1)}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)}, \tag{3.8}$$

où $K_1(\alpha_1)$ est définie par (3.3).

Démonstration. Le Lemme 3.3 s'applique et donne l'existence d'une solution $\mathbf{z}$ dans $H^1(\Omega)^3$ du problème (3.1). Nous avons encore

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2}\leq\rho_1(\mathbf{f})<\frac{\nu}{K(\alpha_1)}<\frac{\nu}{(2C_1+C_2^{3/2})\alpha_1C_2(\alpha_1)}.$$

Cela implique l'unicité dans $L^2(\Omega)^3$ du problème (3.1) et donc $\mathbf{z}=\mathbf{rot}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})$, où $\mathbf{u}$ est l'unique solution dans V_2 du problème (1.1)-(1.3). De là $\mathbf{rot}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})$ appartient à $H^1(\Omega)^3$ et le Lemme II.3.1, avec la régularité $C^{3,1}$ de Γ, implique que $\mathbf{u}$ appartient à $H^4(\Omega)^3$.

On montre, en utilisant la forme conjuguée du numérateur de $\rho_1(\mathbf{f})$, l'inégalité

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2}\leq\frac{2\alpha_1|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}}{\nu}, \tag{3.9}$$

que l'on substitue dans la majoration (3.6), ce qui donne, en remplaçant $|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$ par sa définition (2.11) et passant à la limite,

$$\|\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)}\leq\frac{2\sqrt{2}K(\alpha_1)(\alpha_1+\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}+\frac{\alpha_1K(\alpha_1)(1+2\sqrt{2}C_2(\alpha_1))}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}C_2(\alpha_1)}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)}. \tag{3.10}$$

Ensuite, de (3.3) on déduit

$$\|\mathbf{u}\|_{H^4(\Omega)}\leq K_1(\alpha_1)(\|P(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)}).$$

Mais

$$\|P(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}\leq\|\mathbf{u}\|_{V_2}\leq\frac{2\alpha_1}{\nu}|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}, \tag{3.11}$$

d'où, en remplaçant $|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$ par sa définition (2.11),

$$\|\mathbf{u}\|_{H^4(\Omega)}\leq K_1(\alpha_1)[\frac{2(\alpha_1+\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}+\frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)}].$$

Substituant (3.10) dans cette inégalité, on obtient (3.8).
$\triangle$

Passons à la régularité H^5 de $\mathbf{u}$.

Théorème 3.5 *Soit Ω un domaine borné de $I\!R^3$, avec une frontière Γ de classe $C^{4,1}$. Soit $\mathbf{f}$ donné dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$, suffisamment petit pour satisfaire*

$$\begin{aligned}&(1+\frac{\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2}}{\alpha_1})\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}\\ &<\frac{\nu^2}{2\alpha_1}\min(\frac{1}{K(\alpha_1)},\frac{1}{2C_1\alpha_1M(\alpha_1)},\frac{1}{4(C_1+C_2^{3/2})\alpha_1C_2(\alpha_1)}),\end{aligned}\tag{3.12}$$

où $K(\alpha_1)$ est définie par (2.3) et $M(\alpha_1)$ par (2.12). Si $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartient à $H^2(\Omega)^3$, alors l'unique solution $\mathbf{u}$ dans V_2 de (1.1)-(1.3) appartient à $H^5(\Omega)^3$. De plus, si $\mathbf{f}$ vérifie

$$\begin{aligned}&(1+\frac{\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2}}{\alpha_1})\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}\\ &<\frac{\nu^2}{2\alpha_1}\min(\frac{1}{K(\alpha_1)},\frac{1}{2C_1\alpha_1M(\alpha_1)},\frac{1}{8(C_1+C_2^{3/2})\alpha_1C_2(\alpha_1)}),\end{aligned}\tag{3.13}$$

on a la majoration

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_{H^5(\Omega)}\leq{}&\frac{2K_2(\alpha_1)(\alpha_1+\mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})(1+2\sqrt{2}C_2(\alpha_1))}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}\\ &+\frac{4\alpha_1K_2(\alpha_1)(1+\sqrt{2}C_2(\alpha_1))}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^2(\Omega)},\end{aligned}\tag{3.14}$$

où $K_2(\alpha_1)$ est définie par (3.3).

Démonstration. L'hypothèse (3.12) implique l'existence et l'unicité de la solution $\mathbf{u}$ de (1.1)-(1.3). On définit toujours le même problème approché (III.5.6) de (3.1) avec $\mathbf{w}_j$ fonction propre du problème (III.5.25). Par les mêmes arguments que dans la démonstration du Lemme III. 5.8, on montre

$$(\frac{\nu}{\alpha_1}-4(C_1+C_2^{3/2})C_2(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2})\|\mathbf{z}_m\|_{H^2(\Omega)}\leq\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^2(\Omega)}+\frac{\sqrt{2}\nu}{\alpha_1}C_2(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}.\tag{3.15}$$

De (3.9) et (3.12), on déduit

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2}\leq\frac{2\alpha_1}{\nu}|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}<\frac{\nu}{4(C_1+C_2^{3/2})\alpha_1C_2(\alpha_1)}.\tag{3.16}$$

De là

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^2(\Omega)}\leq\frac{\alpha_1\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{H^2(\Omega)}+\sqrt{2}\,\nu C_2(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}}{\nu-4(C_1+C_2^{3/2})\alpha_1C_2(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{V_2}}.$$

La suite $\{\mathbf{z}_m\}$ est donc bornée dans $H^2(\Omega)^3$ uniformément par rapport à m et elle converge faiblement dans $H^2(\Omega)^3$ vers $\mathbf{z}$, solution de (1.1)-(1.3). L'unicité dans $L^2(\Omega)^3$ de la solution du problème précédent implique que

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{z} \text{ appartient à } H^2(\Omega)^3.$$

Grâce au Lemme II.3.1 et à la régularité de Γ, on déduit que $\mathbf{u}$ appartient à $H^5(\Omega)^3$.

Sous l'hypothèse (3.13), (3.9) implique

$$\|\mathbf{u}\|_{V_2} \leq \frac{2\alpha_1}{\nu} |||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)} < \frac{\nu}{8(C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C_2(\alpha_1)}.$$

De là, substituer cette inégalité dans (3.15) donne

$$\|\mathbf{z}_m\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{2\alpha_1}{\nu} \|\mathbf{rot}\, \mathbf{f}\|_{H^2(\Omega)} + 2\sqrt{2}\, C_2(\alpha_1) \|\mathbf{u}\|_{V_2}.$$

Appliquant de nouveau (3.9), remplaçant $|||\mathbf{f}|||_{H(\mathbf{rot};\Omega)}$ par sa définition (2.11) et passant à la limite par rapport à m, nous obtenons

$$\|\mathbf{z}\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{4\sqrt{2}\, C_2(\alpha_1)(\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2 + 2})}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{2\alpha_1}{\nu}(1 + 2\sqrt{2}\, C_2(\alpha_1)) \|\mathbf{rot}\, \mathbf{f}\|_{H^2(\Omega)}. \tag{3.17}$$

Par ailleurs, l'inégalité (3.3) donne

$$\|\mathbf{u}\|_{H^5(\Omega)} \leq K_2(\alpha_1)(\|P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{z}\|_{H^2(\Omega)}).$$

Alors, grâce à (3.11), on déduit

$$\|\mathbf{u}\|_{H^5(\Omega)} \leq K_2(\alpha_1)(\frac{2(\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2 + 2})}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{2\alpha_1}{\nu} \|\mathbf{rot}\, \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{z}\|_{H^2(\Omega)}).$$

Substituant (3.17) dans cette inégalité, on obtient (3.14).
$\triangle$

Comme au chapitre précédent, nous allons établir un résultat général de régularité. On démontre, par induction, le théorème suivant.

Théorème 3.6 *Soit un entier $m \geq 2$ et Ω un domaine borné de R^3, avec une frontière Γ de classe $C^{m+2,1}$. Supposons que $\mathbf{f}$ soit dans $L^2(\Omega)^3$ et $\mathbf{rot}\, \mathbf{f}$ dans $H^m(\Omega)^3$. Il existe deux constantes a_m et b_m telles que, si $\mathbf{f}$ vérifie*

$$a_m \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + b_m \|\mathbf{rot}\, \mathbf{f}\|_{H^{m-2}(\Omega)} < 1, \tag{3.18}$$

alors l'unique solution $\mathbf{u}$ dans V_2 du problème (1.1)-(1.3) appartient à $H^{m+3}(\Omega)^3$. De plus il existe deux constantes c_m et d_m telles que

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq c_m \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + d_m \|\mathbf{rot}\, \mathbf{f}\|_{H^m(\Omega)}. \tag{3.19}$$

Démonstration. Le Théorème 3.5 montre que le théorème est vrai pour $m = 2$ avec

$$a_2 = \frac{2(\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})}{\nu^2} \max\left(K(\alpha_1), 2C_1\alpha_1 M(\alpha_1), 8(C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C_2(\alpha_1)\right),$$

$$b_2 = \frac{2\alpha_1}{\nu^2} \max\left(K(\alpha_1), 2C_1\alpha_1 M(\alpha_1), 8(C_1 + C_2^{3/2})\alpha_1 C_2(\alpha_1)\right),$$

$$c_2 = \frac{2K_2(\alpha_1)(\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})(1 + 2\sqrt{2}\,C_2(\alpha_1))}{\nu} \text{ et } d_2 = \frac{4\alpha_1 K_2(\alpha_1)(1 + \sqrt{2}\,C_2(\alpha_1))}{\nu}.$$

Supposons le résultat du théorème vrai jusqu'à l'ordre $m-1$ pour $m \geq 3$ et démontrons-le à l'ordre m. La démonstration est presque la même que celle du Théorème 3.6. Ainsi, on est conduit à la même inégalité (III.5.45). Dans le cas $m = 3$, on a la même condition, mais avec

$$a_1 = \frac{2(\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})}{\nu^2} \max\left(K(\alpha_1), 2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)\right)$$

et

$$b_1 = \frac{2\alpha_1}{\nu^2} \max\left(K(\alpha_1), 2C_1\alpha_1 M(\alpha_1)\right),$$

et la même conclusion , mais avec

$$c_1 = \frac{2K_1(\alpha_1)(\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})(\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2} + \sqrt{2}K(\alpha_1))}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}}$$

et

$$d_1 = \frac{\alpha_1 K_1(\alpha_1)[2\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}C_2(\alpha_1) + K(\alpha_1)(1 + 2\sqrt{2}C_2(\alpha_1))]}{\nu\sqrt{\mathcal{P}^2+1}C_2^{3/2}C_2(\alpha_1)}.$$

Les suites $\{a_m\}$ et $\{b_m\}$ sont définies par les mêmes relations de récurrence. Grâce à (3.3) et (3.11), on a

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{m+3}(\Omega)} \leq K_m(\alpha_1)\left(\frac{2(\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2})}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}\|_{L^2\Omega)} + \|\mathbf{z}\|_{H^m(\Omega)}\right).$$

Substituant (III.5.50) dans cette inégalité, on obtient (3.19) avec

$$c_m = 2\left(\sqrt{2}\,c_{m-2} + \frac{\alpha_1 + \mathcal{P}\sqrt{\mathcal{P}^2+2}}{\nu}\right)K_m(\alpha_1) \text{ et } d_m = \left(2\sqrt{2}\,d_{m-2} + \frac{4\alpha_1}{\nu}\right)K_m(\alpha_1).$$

△

Par les mêmes arguments qu'au chapitre précédent, on obtient encore l'existence d'une solution classique.

Théorème 3.7 *Sous les hypothèses du Théorème 3.5, le problème (1.1)-(1.3) admet une solution unique* $(\mathbf{u}, p)$ *dans* $C^3(\overline{\Omega})^3 \times (C^1(\overline{\Omega})/\mathbb{R})$.

Troisième partie

Sur une classe de fluide de grade trois.

Chapitre V
Fluide de grade trois avec Ω simplement connexe

1 Introduction

La loi de comportement la plus générale pour les fluides de grade 3 est

$$T = -\tilde{p}I + \nu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 + \beta_1 A_3 + \beta_2(A_1A_2 + A_2A_1) + \beta(|A_1|^2 A_1), \tag{1.1}$$

(cf. W. Noll et C. Truesdell [25]), où T est le tenseur des contraintes, $\tilde{p}$ la pression (une fonction scalaire), I la matrice unité et A_n le $n^{ième}$ tenseur de Rivlin-Ericksen défini récursivement pour $n \geq 2$ par:

$$A_n = \frac{dA_{n-1}}{dt} + A_{n-1}L + L^T A_{n-1},$$

où A_1 et L sont donnés au Paragraphe I.1. La constante ν est la viscosité et les coefficients α_i , β_i et β sont les modules de contrainte normale. Ces coefficients ne sont pas arbitraires. Plus précisément on montre (cf. R. L. Fosdick et K. R. Rajagopal [16]) que si l'inéquation de Clausius-Duhem est satisfaite et si l'énergie libre est minimum à l'équilibre, alors

$$\nu > 0,\ \ \alpha_1 > 0,\ \ \beta_1 = \beta_2 = 0,\ \ \beta > 0.$$

Avec ces restrictions et compte tenu des définitions et calculs du Paragraphe I.1, la loi constitutive des fluides de grade 3 (1.1) s'écrit sous la forme

$$T = -\tilde{p}I + \nu A_1 + \alpha_1(\frac{d}{dt}A_1 + A_1W - WA_1) + (\alpha_1 + \alpha_2)A_1^2 + \beta|A_1|^2 A_1. \tag{1.2}$$

L'équation de mouvement pour un fluide de grade 3 est de la forme

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \operatorname{div} T\, +\, \mathbf{f}. \tag{1.3}$$

D'après le Paragraphe I.1, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{div} T = &-\nabla\tilde{p} + \nu\Delta\mathbf{u} + \alpha_1\frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial t} + (\alpha_1 + \alpha_2)(\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}) - 2\mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u}))\\ &+(2\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{rot}\,(\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u}.\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{4}|A_1|^2)) + \beta\operatorname{div}(|A_1|^2 A_1).\end{aligned} \tag{1.4}$$

En utilisant (1.4) et la relation

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{rot}\,\mathbf{u} \times \,\mathbf{u} + \nabla\,(\tfrac{1}{2}|\mathbf{u}|^2),$$

l'équation (1.3) s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\,\Delta\mathbf{u} - \alpha_1\frac{\partial}{\partial t}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} \\ -(\alpha_1+\alpha_2)\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}) + 2(\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u}) - \beta\mathrm{div}(|A_1|^2A_1) \\ +\nabla\tilde{p} - (2\alpha_1+\alpha_2)\nabla(\mathbf{u}.\Delta\,\mathbf{u} + \frac{1}{4}|A_1|^2) + \frac{1}{2}\nabla(|\mathbf{u}\,|^2) = \mathbf{f}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Cette équation de mouvement est complétée par l'équation d'état $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$ dans Ω, une donnée initiale pour la vitesse et une condition homogène pour la vitesse sur la frontière du domaine.

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$, borné et simplement connexe, de frontière Γ qui est au moins de classe $C^{2,1}$. On définit p comme au Paragraphe I.2. Avec cette notation, le système d'équations que nous proposons de résoudre est:

Chercher une fonction à valeurs vectorielles $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et une fonction scalaire p définies dans $\Omega\times]0,T[$, pour un temps $T > 0$, solution de :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u}) - \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} - (\alpha_1+\alpha_2)\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}) \\ +2(\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u}) - \beta\mathrm{div}(|A_1|^2A_1) + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega\times]0,T[,\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\mathrm{div}\;\mathbf{u} = 0 \qquad \text{dans} \;\; \Omega\times]0,T[, \tag{1.7}$$

avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{sur} \;\; \Gamma\times]0,T[, \tag{1.8}$$

et la donnée initiale:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \qquad \text{dans} \;\; \Omega. \tag{1.9}$$

Les paramètres α_1, ν et β sont des constantes positives données et la donnée initiale $\mathbf{u}_0$ satisfait à la condition de compatibilité :

$$\mathrm{div}\;\mathbf{u}_0 = 0 \;\; \text{dans} \;\; \Omega \text{ et } \;\; \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \;\; \text{sur} \;\; \Gamma. \tag{1.10}$$

La méthode d'étude est pratiquement la même que celle utilisée pour les fluides de grade 2. En particulier, on déduit de l'équation (1.6) une équation de transport du type:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{u}.\nabla(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + M(\mathbf{u}) = \mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}, \tag{1.11}$$

où $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{u}$ et $M(\mathbf{u})$ rassemble des termes non-linéaires d'ordre inférieur que nous expliciterons par la suite.

Les fluides de grade 3 ont été étudiés par C. Amrouche dans [2] et par C. Amrouche et D. Cioranescu dans [4]. Dans le cas de la dimension trois, ils obtinrent l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.6)-(1.10) sur un certain intervalle de temps, sans restriction sur les données, mais seulement sous la condition supplémentaire

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \leq (24\,\nu\beta)^{1/2}. \tag{1.12}$$

D'autre part, ils prouvèrent l'existence globale en temps, sous certaines restrictions sur les données, mais seulement pour la dimension deux.

Nous nous plaçons, dans ce chapitre, dans le cas de la dimension trois et nous nous proposons d'appliquer une méthode analogue à celle utilisée pour les fluides de grade 2, afin de prouver l'existence globale en temps de la solution du problème (1.6)-(1.10), sous une certaine condition de grandeur sur les données, mais sans supposer la condition (1.12).

Le plan du chapitre est le suivant: Après ce paragraphe d'introduction, le Paragraphe 2 établit des estimations formelles *a priori* satisfaites par des solutions régulières du problème, puis l'unicité de la solution si elle existe. Nous démontrons l'existence dans le Paragraphe 3 par la même méthode qu'au Chapitre I, c'est-à-dire une méthode de Galerkin avec base spéciale. Enfin le Paragraphe 4 étudie la régularité de la solution, suivant celle des données.

2 Estimations *a priori* et unicité

On définit V_2 par (I.2.8), le produit scalaire et la norme associée dans V_2 par (I.2.11). Pour établir une formulation variationnelle du problème, nous avons besoin du résultat suivant.

Lemme 2.1 *Soient* $\mathbf{u} \in H^3(\Omega)^3$ *et* $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3$. *On définit la matrice* $A(\mathbf{v})$ *par:*

$$(A(\mathbf{v}))_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \qquad \text{pour } i, j = 1, 2, 3. \tag{2.1}$$

Alors

$$(-\text{div}(|A(\mathbf{u})|^2 A(\mathbf{u})), \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(|A(\mathbf{u})|^2 A(\mathbf{u}), A(\mathbf{v})). \tag{2.2}$$

Démonstration. En appliquant la formule de Green, on obtient

$$(-\text{div}(|A(\mathbf{u})|^2 A(\mathbf{u})), \mathbf{v}) = \int_\Omega |A(\mathbf{u})|^2 \sum_{i,j=1}^{3} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, d\mathbf{x}.$$

Mais

$$\sum_{i,j=1}^{3} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}).$$

De là, (2.2) suit.

△

On définit le produit scalaire dans V comme au Paragraphe I.5 et b comme au Paragraphe I.2. Remarquant que $A_1 = A(\mathbf{u})$, le Lemme 2.1 conduit à la formulation variationnelle suivante du problème (1.6)-(1.9).

Pour $\mathbf{f}$ donné dans $L^2(0,T;H(\mathbf{rot};\Omega)) \bigcap L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)$ et $\mathbf{u}_0$ donné dans V_2, chercher $\mathbf{u}$ dans $L^\infty(0,T;V_2)$ avec $\mathbf{u}'$ dans $L^2(0,T;V)$, tel que

$$\forall \mathbf{v} \in V \qquad (\mathbf{u}',\mathbf{v})_V + \nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v}) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u},\mathbf{v})$$

$$+(\alpha_1+\alpha_2)[(\nabla(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}),\nabla\mathbf{v}) + 2\,b(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u},\mathbf{v})] + \frac{\beta}{2}(|A(\mathbf{u})|^2 A(\mathbf{u}), A(\mathbf{v})) = (\mathbf{f},\mathbf{v}) \tag{2.3}$$

avec la condition initiale (1.9).

Clairement, en restreignant l'ensemble des solutions de (1.6)-(1.10) à $L^\infty(0,T;V_2)$ avec dérivée première dans $L^2(0,T;V)$, cette formulation est équivalente à (1.6)-(1.10).

Lemme 2.2 *Supposons que le problème (2.3), (1.9) ait une solution* $\mathbf{u}$ *dans* $C^0(0,T;V_2)$ *avec* $\mathbf{u}'$ *dans* $L^\infty(0,T;V)$. *Posons*

$$K_1 = \frac{\nu}{2(\mathcal{P}^2+\alpha_1)},\ K_2 = \frac{6}{\alpha_1}|\alpha_1+\alpha_2|C_1C(\alpha_1).$$

Alors cette solution satisfait les inégalités suivantes pour tout t *dans* $[0,T]$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(t)\|_V^2 \le e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds\\ -K_2\int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}(s)\|_{V_2})\|\mathbf{u}(s)\|_V^2\,ds,\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\,|A(\mathbf{u}(s))|\,\|^4_{L^4(\Omega)}\,ds \le \frac{1}{\beta}(\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds)\\ -\frac{K_2}{\beta}\int_0^t(\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}(s)\|_{V_2})\|\mathbf{u}(s)\|_V^2\,ds).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Démonstration. On choisit $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans (2.3). Les mêmes arguments que dans la démonstration du Lemme I.3.1 impliquent

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_V^2 + \nu|\mathbf{u}(t)|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\beta}{2}\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\,\|^4_{L^4(\Omega)}\\ &\le |(\mathbf{f}(t),\mathbf{u}(t))| + 3|\alpha_1+\alpha_2||b(\mathbf{u}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t))|.\end{aligned} \tag{2.6}$$

On remarque que

$$|(\mathbf{f}(t),\mathbf{u}(t))| \le \frac{\mathcal{P}^2}{2\nu}\|\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}|\mathbf{u}(t)|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{2.7}$$

Utilisant la majoration précédente, (I.3.6), (I.3.4) et tenant compte des notations K_1 et K_2, on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_V^2 + K_1\|\mathbf{u}(t)\|_V^2 + \beta\|\,|A(\mathbf{u}(t)|\,\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - K_2(\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}(t)\|_{V_2})\|\mathbf{u}(t)\|_V^2. \tag{2.8}$$

Alors on déduit (2.4) en multipliant les deux membres de (2.8) par $e^{K_1 t}$ et en intégrant de 0 à t. Enfin, (2.5) se déduit de (2.8), par intégration de 0 à t.
$\triangle$

Comme au Chapitre I, nous obtiendrons une équation de transport en prenant le **rot** de l'équation (1.6). Auparavant, nous avons besoin du résultat technique suivant pour calculer le rotationnel du terme spécifique de grade 3.

Lemme 2.3 *On note $A_{.,j}$ le $j^{ième}$ vecteur colonne de la matrice A. Supposons* $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$. *Formellement, nous avons:*

$$\mathbf{rot}(\operatorname{div}(|A(\mathbf{v})|^2 A(\mathbf{v}))) = |A(\mathbf{v})|^2\Delta(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) + 2\nabla(|A(\mathbf{v})|^2).\nabla\mathbf{rot}\,\mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{v}), \tag{2.9}$$

où

$$\mathbf{B}(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{3}[\nabla(\frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{v})|^2)) \times A_{.,k}(\mathbf{v}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{v})|^2)\nabla((\mathbf{rot}\,\mathbf{v})_k)]. \tag{2.10}$$

Démonstration. On note $A_{i,.}$ le $i^{ème}$ vecteur ligne de la matrice A. On rappelle les identités suivantes:

$$\operatorname{div}(\theta\mathbf{v}) = \theta\operatorname{div}\mathbf{v} + \nabla\theta.\mathbf{v}, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{rot}(\theta\mathbf{v}) = \theta\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v} + \nabla\theta \times \mathbf{v}. \tag{2.12}$$

De (2.11), on déduit

$$\operatorname{div}(|A(\mathbf{v})|^2 A_{i,.}(\mathbf{v})) = |A(\mathbf{v})|^2\operatorname{div}(A_{i,.}(\mathbf{v})) + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{v})|^2)A_{i,k}(\mathbf{v}).$$

D'où

$$\operatorname{div}(|A(\mathbf{v})|^2 A(\mathbf{v})) = |A(\mathbf{v})|^2\operatorname{div}(A(\mathbf{v})) + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{v})|^2)A_{.,k}(\mathbf{v}).$$

Mais, puisque $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, on a

$$\operatorname{div}(A(\mathbf{v})) = \Delta\,\mathbf{v}.$$

Nous obtenons donc

$$\operatorname{div}(|A(\mathbf{v})|^2 A(\mathbf{v})) = |A(\mathbf{v})|^2\Delta\,\mathbf{v} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{v})|^2)A_{.,k}(\mathbf{v}). \tag{2.13}$$

Ensuite, de (2.12) et de $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, on déduit

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(|A(\mathbf{v})|^2\Delta\mathbf{v}) &= |A(\mathbf{v})|^2\Delta(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) + \nabla(|A(\mathbf{v})|^2) \times \Delta\mathbf{v}\\ &= |A(\mathbf{v})|^2\Delta(\mathbf{rot}\mathbf{v}) + \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) \times \nabla(|A(\mathbf{v})|^2).\end{aligned}$$

On peut vérifier l'identité

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w}.\nabla \mathbf{v} - \sum_{k=1}^{3} w_k \nabla v_k.$$

D'où

$$\mathbf{rot}(|A(\mathbf{v})|^2 \Delta \mathbf{v}) = |A(\mathbf{v})|^2 \Delta(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) + \nabla(|A(\mathbf{v})|^2).\nabla\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{v})|^2)\nabla((\mathbf{rot}\,\mathbf{v})_k). \tag{2.14}$$

Utilisant de nouveau (2.12), on obtient

$$\mathbf{rot}(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{v})|^2)A_{.,k}(\mathbf{v})) = \sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{v})|^2)\mathbf{rot}\,A_{.,k}(\mathbf{v}) + \nabla(\frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{v})|^2)) \times A_{.,k}(\mathbf{v})).$$

Mais

$$\mathbf{rot}\,A_{.,k}(\mathbf{v}) = \mathbf{rot}\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} + \mathbf{rot}\,\nabla\, v_k = \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{v}.$$

De là

$$\mathbf{rot}(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{v})|^2)A_{.,k}(\mathbf{v})) = \nabla(|A(\mathbf{v})|^2).\nabla\mathbf{rot}\,\mathbf{v} + \sum_{k=1}^{3} \nabla(\frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{v})|^2)) \times A_{.,k}(\mathbf{v}). \tag{2.15}$$

De (2.14) et (2.15), on déduit (2.9).
$\triangle$

On pose $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{u}$. Utilisant les résultats du Paragraphe I.2 et le Lemme 2.3 pour le terme spécifique de grade 3, nous sommes en mesure de prendre le rotationnel de l'équation (1.6) et donc d'obtenir l'équation de transport suivante:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{u}.\nabla(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}).\nabla \mathbf{u} - (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta \mathbf{u}.\nabla \boldsymbol{\omega} \\
&+(\alpha_1 + \alpha_2)[\boldsymbol{\omega}.\nabla(\Delta \mathbf{u}) + 2\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x_k} + \nabla u_k \times \nabla\, \Delta u_k)] + \beta[-\mathbf{B}(\mathbf{u}) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha_1}|A(\mathbf{u})|^2(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}) - 2\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla \boldsymbol{\omega}] = \mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \frac{\beta}{\alpha_1}|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Cette équation est formelle car le premier terme non-linéaire n'est pas défini à moins que $\mathbf{u}(t)$ n'appartienne à $H^4(\Omega)^3$.

Théorème 2.4 *Supposons, en plus des hypothèses du Lemme 2.2, que* $\mathbf{u}$ *appartienne à* $L^2(0,T;H^4(\Omega)^3)$. *Alors* $y(t) = \|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2$ *satisfait l'inégalité différentielle dans* $[0,T]$*:*

$$
\begin{aligned}
y'(t) &\leq \frac{4\nu}{\alpha_1^2}(e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\,ds) \\
&+\frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)} - y(t))y(t) \\
&+\frac{\beta C(\alpha_1)}{2\alpha_1^2}\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\,\|_{L^4(\Omega)}^4 - \frac{4\nu}{\alpha_1^2}K_2\int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - \sqrt{y(s)}\,)\|\mathbf{u}(s)\|_V^2\,ds, \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

où

$$
C(\alpha_1,\alpha_2,\beta) = \frac{2\alpha_1}{\nu}(C(\alpha_1,\alpha_2))^2 + \beta(C(\alpha_1))^3(16C_1((3\sqrt{2}+2)C_2^{3/2} + 2C_1) + \frac{C_2^3}{2}) \quad (2.18)
$$

avec $C(\alpha_1,\alpha_2)$ définie par (I.3.9) et K_1 et K_2 sont définies dans le Lemme 2.2.

Démonstration. Pour simplifier, posons $\mathbf{z} = \boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}$. Prendre le produit scalaire de (2.16) avec $\mathbf{z}$ donne

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2 + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2 - b(\mathbf{z}(t);\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t)) + (\alpha_1+\alpha_2)\{-b(\Delta\mathbf{u}(t);\boldsymbol{\omega}(t),\mathbf{z}(t)) \\
&\quad+b(\boldsymbol{\omega}(t);\Delta\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t)) + 2\sum_{k=1}^{3}[b(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k};\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k},\mathbf{z}(t)) - b(\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial x_k};\frac{\partial\boldsymbol{\omega}(t)}{\partial x_k},\mathbf{z}(t)) \\
&\quad+(\nabla u_k(t)\times\nabla\Delta u_k(t),\mathbf{z}(t))]\} - \beta\{2(\nabla(|A(\mathbf{u}(t))|^2).\nabla\boldsymbol{\omega}(t),\mathbf{z}(t)) + (\mathbf{B}(\mathbf{u}(t)),\mathbf{z}(t))\} \\
&+\frac{\beta}{\alpha_1}\||A(\mathbf{u}(t))|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = (\mathbf{rot}(\mathbf{f}(t) + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u}(t)),\mathbf{z}(t)) + \frac{\beta}{\alpha_1}(|A(\mathbf{u}(t))|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t)).\quad(2.19)
\end{aligned}
$$

Il nous faut majorer les termes spécifiques du grade 3, car les autres termes ont été majorés dans le Paragraphe I.3. Pour simplifier, supprimons la variable t. On a tout d'abord

$$
(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\boldsymbol{\omega},\mathbf{z}) = \int_\Omega \sum_{i,j,k,l=1}^{3} 2A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}\frac{\partial\omega_l}{\partial x_k}z_l\,d\mathbf{x}.
$$

Par Hölder et Cauchy-Schwarz, on obtient

$$
|(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\boldsymbol{\omega},\mathbf{z})| \leq 2\|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)}\|\,|A(\mathbf{u})|\,\|_{L^\infty(\Omega)}[\int_\Omega(\sum_{k,l=1}^{3}(\frac{\partial\omega_l}{\partial x_k})^2)(\sum_{i,j,k=1}^{3}(\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k})^2)\,d\mathbf{x}]^{1/2}.
$$

Mais

$$
|A(\mathbf{u})|^2 \leq 4\sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j})^2 \text{ et } \sum_{i,j,k=1}^{3}(\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k})^2 \leq 4\sum_{i,j,k=1}^{3}(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k})^2. \qquad (2.20)
$$

D'où

$$
|(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\boldsymbol{\omega},\mathbf{z})| \leq 8\|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^4(\Omega)}\|\partial^2\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}.
$$

Alors de (I.2.15), (I.2.16), (I.2.12) et du Lemme I.3.3, on déduit

$$
|(\nabla(|A(\mathbf{u}(t))|^2).\nabla\boldsymbol{\omega}(t),\mathbf{z}(t))| \leq 8\sqrt{2}C_1C_2^{3/2}(C(\alpha_1))^3\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^4. \qquad (2.21)
$$

Ensuite majorons les termes issus de $\mathbf{B}(\mathbf{u})$.

$$\begin{aligned}&(\sum_{k=1}^{3}\nabla(\frac{\partial}{\partial x_k}|A(\mathbf{u})|^2)\times A_{.,k}(\mathbf{u}),\mathbf{z})\\&=2\sum_{k,i,j=1}^{3}[(A_{ij}(\mathbf{u})\nabla\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}\times A_{.,k}(\mathbf{u}),\mathbf{z})+(\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}\nabla A_{ij}(\mathbf{u})\times A_{.,k}(\mathbf{u}),\mathbf{z})].\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder et le Lemme I.3.4 impliquent

$$\begin{aligned}&|(\sum_{k=1}^{3}\nabla(\frac{\partial}{\partial x_k}|A(\mathbf{u})|^2)\times A_{.,k}(\mathbf{u}),\mathbf{z})|\leq 2\|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)}\\&(\sum_{k,i,j=1}^{3}\|A_{.,k}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}[\|A_{ij}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)}+\|\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}\nabla A_{ij}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}]).\end{aligned}$$

Ensuite, grâce à Cauchy-Schwarz et à (2.20), nous obtenons

$$\sum_{k,i,j=1}^{3}\|A_{.,k}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}\|A_{ij}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)}\leq 8\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\partial^3\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

et, avec en plus (I.2.16),

$$\begin{aligned}\sum_{k,i,j=1}^{3}\|A_{.,k}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}\nabla A_{ij}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}&\leq 2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}(\sum_{i,j=1}^{3}\|\nabla A_{ij}(\mathbf{u})\|^2_{L^4(\Omega)})\\&\leq 8C_2^{3/2}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)}.\end{aligned}$$

De là, avec (I.2.15) et (I.2.12), nous déduisons

$$|(\sum_{k=1}^{3}\nabla(\frac{\partial}{\partial x_k}|A(\mathbf{u}(t))|^2)\times A_{.,k}(\mathbf{u}(t)),\mathbf{z}(t))|\leq 16C_1(C_1+C_2^{3/2})(C(\alpha_1))^3\|\mathbf{u}(t)\|^4_{V_2}.\tag{2.22}$$

Enfin,

$$(\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}|A(\mathbf{u})|^2)\nabla\omega_k,\mathbf{z})=2\int_\Omega\sum_{k,l,i,j=1}^{3}A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}\frac{\partial\omega_k}{\partial x_l}z_l\,d\mathbf{x}.$$

Par les mêmes procédés que précédemment, on obtient

$$|(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{u})|^2)\nabla\omega_k,\mathbf{z})|\leq 2\|\,|A(\mathbf{u})|\,\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla A(\mathbf{u})\|_{L^4(\Omega)},$$

puis

$$|(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{u}(t))|^2)\nabla\omega_k(t),\mathbf{z}(t))|\leq 8\sqrt{2}C_1C_2^{3/2}(C(\alpha_1))^3\|\mathbf{u}(t)\|^4_{V_2}.\tag{2.23}$$

Il reste à majorer les termes du second membre. On a successivement

$$|(\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t),\mathbf{z}(t))|\leq\frac{\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\nu}{4\alpha_1}\|\mathbf{z}(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$|(\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t))| \leq \|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\mathbf{z}(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$|(|A(\mathbf{u}(t))|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t),\mathbf{z}(t))| \leq \frac{1}{4}\|\,|A(\mathbf{u}(t)|\,\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\,|A(\mathbf{u}(t))|\mathbf{z}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Utilisant les majorations (I.3.11)-(I.3.16) pour les termes de grade 2, les majorations (2.21)-(2.23) pour les termes spécifiques de grade 3 et les majorations précédentes pour les termes du second membre, on obtient, avec la notation $C(\alpha_1,\alpha_2)$ définie par (I.3.9),

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{V_2} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{V_2} \leq \frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2C(\alpha_1,\alpha_2)\|\mathbf{u}(t)\|^3_{V_2}$$

$$+16\beta C_1((3\sqrt{2}+2)C_2^{3/2}+2C_1)(C(\alpha_1))^3\|\mathbf{u}(t)\|^4_{V_2} + \frac{\beta}{2\alpha_1}\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \quad (2.24)$$

Pour estimer $\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$, on utilise l'inégalité, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|(v,w)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|w\|^2_{L^2(\Omega)}. \quad (2.25)$$

On remarque que

$$\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = (|A(\mathbf{u}(t))|^2, |\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)|^2)$$

et, utilisant (2.25) avec $\varepsilon = \dfrac{2C(\alpha_1)}{\alpha_1}$, on obtient

$$\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C(\alpha_1)}{\alpha_1}\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\,\|^4_{L^4(\Omega)} + \frac{\alpha_1}{4C(\alpha_1)}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|^4_{L^4(\Omega)}.$$

Mais, du Lemme I.3.3, de (I.2.16) et de (I.2.12), on déduit

$$\|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|^4_{L^4(\Omega)} \leq 4\|\nabla\mathbf{u}(t)\|^4_{L^4(\Omega)} \leq 4C_2^3(C(\alpha_1))^4\|\mathbf{u}(t)\|^4_{V_2}.$$

D'où

$$\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C(\alpha_1)}{\alpha_1}\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\,\|^4_{L^4(\Omega)} + \alpha_1(C(\alpha_1))^3C_2^3\|\mathbf{u}(t)\|^4_{V_2}. \quad (2.26)$$

Posons

$$y(t) = \|\mathbf{u}(t)\|^2_{V_2}.$$

Utilisant cette notation, (2.26) et (I.3.4), l'inégalité (2.24) implique

$$y'(t) + \frac{\nu}{\alpha_1}y(t) \leq \frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{4\nu}{\alpha_1^2}\|\mathbf{u}(t)\|^2_V + 2C(\alpha_1,\alpha_2)\,y(t)\sqrt{y(t)}$$

$$+\beta(C(\alpha_1))^3(16C_1((3\sqrt{2}+2)C_2^{3/2}+2C_1) + \frac{C_2^3}{2})\,(y(t))^2 + \frac{\beta C(\alpha_1)}{2\alpha_1^2}\|\,|A(\mathbf{u}(t)|\,\|^4_{L^4(\Omega)}.$$

Mais, pour tout $\theta > 0$ et tout $y \geq 0$, on a

$$\sqrt{y} \leq \frac{1}{4\theta}\,y + \theta.$$

Appliquant cette inégalité avec $\theta = \dfrac{\nu}{4\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2)}$ et $y(t)$ dans l'inéquation différentielle précédente et utilisant la notation (2.18) qui définit $C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$, nous obtenons

$$y'(t) \leq \frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{4\nu}{\alpha_1^2}\|\mathbf{u}(t)\|^2_V$$
$$+\frac{\beta C(\alpha_1)}{2\alpha_1^2}\|\,|A(\mathbf{u}(t)|\,\|^4_{L^4(\Omega)} - C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)(\frac{\nu}{2\,\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)} - y(t))\,y(t)$$

et nous déduisons (2.17) en substituant (2.4) dans cette inégalité.
△

Comme pour les fluides de grade 2, on ne pourra prouver l'existence globale en temps que si on montre que $\mathbf{u}(t)$ est uniformément borné en temps dans V_2.

Lemme 2.5 *Soit* $\mathbf{f}$ *appartenant à* $L^2(I\!R^+; H(\mathbf{rot};\Omega))$. *Si les données satisfont*

$$\|\mathbf{u}_0\|^2_{V_2} + \frac{8\nu + C(\alpha_1)K_1}{2\alpha_1^2 K_1}(\|\mathbf{u}_0\|^2_V + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt) + \frac{2\alpha_1}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$
$$< \min\left(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}, \frac{K_1^2}{K_2^2}\right), \tag{2.27}$$

où $C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ *est définie par (2.18) et* K_1 *et* K_2 *sont définies dans le Lemme 2.2, alors toute solution continue de (2.17) avec la valeur de départ* $y(0) = \|\mathbf{u}_0\|^2_{V_2}$ *satisfait*

$$\forall t \geq 0,\ 0 \leq y(t) \leq \min\left(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}, \frac{K_1^2}{K_2^2}\right). \tag{2.28}$$

Démonstration. Intégrant (2.17) de 0 à t et utilisant le Lemme I.3.7, nous déduisons

$$y(t) \leq y(0) + \frac{1}{K_1}\frac{4\nu}{\alpha_1^2}(\|\mathbf{u}_0\|^2_V + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds) + \frac{2\alpha_1}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds$$
$$+\frac{\beta C(\alpha_1)}{2\alpha_1^2}\int_0^t \|\,|A(\mathbf{u}(s))|\,\|^4_{L^4(\Omega)}\,ds - C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)\int_0^t \left(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)} - y(s)\right) y(s)\,ds$$
$$-\frac{4\nu}{\alpha_1^2}\frac{K_2}{K_1}\int_o^t \left(\frac{K_1}{K_2} - \sqrt{y(s)}\right)\|\mathbf{u}(s)\|^2_V(1 - e^{-K_1(t-s)})\,ds.$$

Substituant l'inégalité (2.5) dans l'inégalité différentielle précédente, nous obtenons

$$y(t) \leq y(0) + \frac{8\nu + C(\alpha_1)K_1}{2K_1\alpha_1^2}(\|\mathbf{u}_0\|^2_V + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds)$$
$$+\frac{2\alpha_1}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds - C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)\int_0^t \left(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)} - y(s)\right) y(s)\,ds$$
$$-\frac{K_2}{2\alpha_1^2}\int_o^t \left(\frac{K_1}{K_2} - \sqrt{y(s)}\right)\|\mathbf{u}(s)\|^2_V[C(\alpha_1) + 16(\mathcal{P}^2 + \alpha_1)(1 - e^{-K_1(t-s)})]\,ds.$$

Posons

$$M = \min\left(\frac{K_1^2}{K_2^2}, \frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}\right) \tag{2.29}$$

et

$$a(s,t) = C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)y(s) + \frac{K_2^2}{2\alpha_1^2(K_1+K_2\sqrt{y(s)})}\|\mathbf{u}(s)\|_V^2[C(\alpha_1)+16(\mathcal{P}^2+\alpha_1)(1-e^{-K_1(t-s)})]. \tag{2.30}$$

Pour $0 \leq s \leq t$, nous avons

$$y(s) \geq 0 \text{ et } C(\alpha_1) + 16(\mathcal{P}^2+\alpha_1)(1-e^{-K_1(t-s)}) \geq 0.$$

Utilisant (2.29) et (2.27), nous obtenons

$$y(t) \leq M - C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)\int_0^t (M-y(s))y(s)\,ds$$
$$-\frac{K_2^2}{2\alpha_1^2}\int_0^t (M-y(s))\|\mathbf{u}(s)\|_V^2 \frac{C(\alpha_1)+16(\mathcal{P}^2+\alpha_1)(1-e^{-K_1(t-s)})}{K_1+K_2\sqrt{y(s)}}\,ds.$$

Puis la notation (2.30) permet d'écrire

$$y(t) < M - \int_0^t (M-y(s))a(s,t)\,ds. \tag{2.31}$$

Alors, comme dans la démonstration du Lemme I.3.8, par des arguments identiques, on obtient l'inégalité (2.28).
$\triangle$

Nous concluons ce paragraphe en prouvant l'unicité de la solution globale du problème (2.3), (1.9), si elle existe. Posons

$$\mathbf{K}(\mathbf{v}) = -\mathrm{div}(|A(\mathbf{v})|^2 A(\mathbf{v})) \tag{2.32}$$

et montrons que l'opérateur $\mathbf{K}$ est monotone. Remarquons que cette monotonie implique que l'unicité pour les fluides de grade 3 découle de celle des fluides de grade 2.

Lemme 2.6 *Soit $\mathbf{K}$ défini par (2.32). Pour tout $\mathbf{v}_1$ et tout $\mathbf{v}_2$ dans V_2,*

$$(K(\mathbf{v}_1) - K(\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \geq 0. \tag{2.33}$$

Démonstration. Rappelons que, d'après le Lemme 2.1,

$$(\mathbf{K}(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(|A(\mathbf{v})|^2 A(\mathbf{v}), A(\mathbf{w})).$$

De là

$$2(\mathbf{K}(\mathbf{v}_1) - \mathbf{K}(\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = (|A(\mathbf{v}_1)|^2 A(\mathbf{v}_1), A(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)) - (|A(\mathbf{v}_2)|^2 A(\mathbf{v}_2), A(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))$$
$$= \|\,|A(\mathbf{v}_1)|\,\|_{L^4(\Omega}^4 + \|\,|A(\mathbf{v}_2)|\,\|_{L^4(\Omega}^4 - ((|A(\mathbf{v}_1)|^2 + |A(\mathbf{v}_2)|^2)A(\mathbf{v}_1), A(\mathbf{v}_2)).$$

Mais la relation $|(v,w)| \leq \dfrac{1}{2}(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w\|^2_{L^2(\Omega)})$ implique

$$\begin{aligned}
&((|A(\mathbf{v}_1)|^2 + |A(\mathbf{v}_2)|^2)A(\mathbf{v}_1), A(\mathbf{v}_2))\\
&= (\sqrt{|A(\mathbf{v}_1)|^2 + |A(\mathbf{v}_2)|^2}A(\mathbf{v}_1), \sqrt{|A(\mathbf{v}_1)|^2 + |A(\mathbf{v}_2)|^2}A(\mathbf{v}_2))\\
&\leq \frac{1}{2}\| \, |A(\mathbf{v}_1)|^2 + |A(\mathbf{v}_2)|^2\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$2(\mathbf{K}(\mathbf{v}_1) - \mathbf{K}(\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \geq \| \, |A(\mathbf{v}_1)| \, \|^4_{L^4(\Omega} + \| \, |A(\mathbf{v}_2)| \, \|^4_{L^4(\Omega} - \frac{1}{2}\| \, |A(\mathbf{v}_1)|^2 + |A(\mathbf{v}_2)|^2\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Si on pose

$$w_1 = |A(\mathbf{v}_1)|^2 \text{ et } w_2 = |A(\mathbf{v}_2)|^2,$$

l'inégalité précédente s'écrit:

$$2(\mathbf{K}(\mathbf{v}_1) - \mathbf{K}(\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \geq \|w_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_2\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|w_1 + w_2\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ce qui implique (2.33).
$\triangle$

Le lemme suivant, analogue au Lemme I.4.1, s'applique à tout couple de solutions de (2.3).

Lemme 2.7 *Soient* $\mathbf{u}_1$ *et* $\mathbf{u}_2$ *deux solutions de (2.3). Leur différence* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ *satisfait l'égalité*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2_V + \nu|\mathbf{u}(t)|^2_{H^1(\Omega)} + b(\mathbf{u}(t); \mathbf{u}_2(t) - 2(\alpha_1 + \alpha_2)\Delta\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}(t))\\
+b(\mathbf{u}(t); \Delta\mathbf{u}(t), (2\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{u}_2(t) + (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{u}_1(t))\\
+b(2(\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{u}_1(t) - \alpha_1\mathbf{u}_2(t); \Delta\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) + \beta(\mathbf{K}(\mathbf{u}_1(t)) - \mathbf{K}(\mathbf{u}_2(t)), \mathbf{u}(t)) = 0. \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de rajouter le terme de grade 3 et (2.34) s'obtient de la même manière que (I.4.1).
$\triangle$

Théorème 2.8 *Le problème (2.3), (1.9) a au plus une solution dans* $L^\infty(0,T;V_2)$ *pour tout* $T > 0$.

Démonstration. Le Lemme 2.6 implique

$$(\mathbf{K}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{K}(\mathbf{u}_2), \mathbf{u}) \geq 0.$$

D'où, avec les inégalités (I.4.5), (I.4.8) et (I.4.10), on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2_V \leq 2\frac{c_1(T) + c_2(T) + c_3(T)}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|^2_V,$$

où $c_1(T)$, $c_2(T)$ et $c_3(T)$ sont donnés dans le Paragraphe I.4. Alors l'inégalité de Gronwall et le fait que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ impliquent que $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ pour tout t dans $[0,T]$.
$\triangle$

3 Existence de la solution

Dans ce paragraphe, nous supposons que la frontière Γ de Ω est de classe $C^{3,1}$ et que $\mathbf{f}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^+; H(\mathbf{rot};\Omega)) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$.

La solution du problème (2.3), (1.9) est construite au moyen d'une discrétisation de Galerkin. On utilise la suite de fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}$ de V_2, définie dans le Paragraphe I.5. On rappelle que

$$(\mathbf{w}_j, \mathbf{v})_{V_2} = \lambda_j(\mathbf{w}_j, \mathbf{v})_V, \ \forall \mathbf{v} \in V_2 \tag{3.1}$$

avec

$$0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k < \ldots \to +\infty,$$

où $\{\lambda_j\}$ est la suite de valeurs propres associées à la suite de fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}$. Les fonctions $\mathbf{w}_j$ forment une base orthonormale dans V et une base orthogonale dans V_2. Cet ensemble de fonctions sera utilisé comme base spéciale dans la méthode de Galerkin-Faedo. Pour tout entier m positif, nous notons V_m l'espace vectoriel engendré par les m premières fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^m$.

Nous définissons une solution approchée du problème (2.3), (1.9) par:

Chercher

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^m c_{j,m}(t)\mathbf{w}_j,$$

solution pour $1 \leq j \leq m$, de

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j)_V + \nu(\nabla \mathbf{u}_m(t), \nabla \mathbf{w}_j) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m(t) - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta \mathbf{u}_m(t)) \times \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) \\
&+(\alpha_1 + \alpha_2)\{b(\mathbf{u}_m(t); \Delta \mathbf{w}_j, \mathbf{u}_m(t)) + 2\, b(\mathbf{u}_m(t); \Delta \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)\} \\
&\qquad + \frac{\beta}{2}(|A(\mathbf{u}_m(t))|^2 A(\mathbf{u}_m(t)), A(\mathbf{w}_j)) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{u}_m(0) = P_m(\mathbf{u}_0). \tag{3.3}$$

Ainsi nous avons à résoudre un système de m équations différentielles ordinaires d'ordre un et de degré trois, avec des coefficients constants et une condition initiale au temps $t = 0$. Comme au Paragraphe I.5, des résultats classiques sur les EDO (*cf.* [10]) assurent qu'un tel système a une solution $\mathbf{u}_m$, unique et continue sur $[0, T_m^*]$ avec $\mathbf{u}'_m$ dans $L^\infty(0, T_m^*)$, pour un nombre $T_m^* > 0$. Nous nous proposons de démontrer que $\mathbf{u}_m(t)$ satisfait l'estimation *a priori* du paragraphe précédent.

En multipliant les deux membres de (3.2) par $c_{j,m}(t)$ et en sommant par rapport à j, nous obtenons, sur $[0, T_m^*]$, l'égalité

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m(t)\|_V^2 + \nu|\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2}\|\,|A(\mathbf{u}_m(t))|\,\|_{L^4(\Omega)}^4 \\
&+3(\alpha_1 + \alpha_2)b(\mathbf{u}_m(t); \Delta \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t)).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Alors la démonstration du Lemme 2.2 s'applique à $\mathbf{u}_m$ sans modification et donne le résultat suivant.

Lemme 3.1 *La solution* $\mathbf{u}_m$ *du problème (3.2), (3.3) satisfait les inégalités suivantes pour tout* t *dans* $[0, T_m^*]$:

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|_V^2 \leq e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_m(0)\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\,ds$$
$$-K_2\int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}_m(s)\|_{V_2})\|\mathbf{u}_m(s)\|_V^2\,ds, \qquad (3.5)$$

$$\int_0^t \|\,|A(\mathbf{u}_m(s))|\,\|_{L^4(\Omega)}^4\,ds \leq \frac{1}{\beta}(\|\mathbf{u}_m(0)\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\,ds)$$
$$-\frac{K_2}{\beta}\int_0^t(\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}_m(s)\|_{V_2})\|\mathbf{u}_m(s)\|_V^2\,ds), \qquad (3.6)$$

où K_1 *et* K_2 *sont définies dans le Lemme 2.2.*

Grâce à la base spéciale, nous pouvons aussi déduire de l'équation (3.2) une estimation pour $\|\mathbf{u}_m(t)\|_{V_2}$. Comme pour les fluides de grade 2, définissons la fonction vectorielle $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{v}$ dans V_2:

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -\nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{rot}(\mathbf{v} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta\mathbf{v}) \times \mathbf{v}$$
$$+(\alpha_1 + \alpha_2)(-\Delta(\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}) + 2\mathbf{v}.\nabla(\Delta\mathbf{v})) - \beta\,\mathrm{div}(|A(\mathbf{v})|^2 A(\mathbf{v})). \qquad (3.7)$$

Si $\mathbf{v}$ appartient à $H^4(\Omega)^3$, nous pouvons vérifier que $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ appartient à $H^1(\Omega)^3$. En effet, nous avons vérifié l'appartenance à $H^1(\Omega)^3$ des termes de grade 2 au Paragraphe I.5. Pour le terme de grade 3, puisque $|A(\mathbf{v})|$ et $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$ sont dans $H^2(\Omega)$ et puisque $H^2(\Omega)$ est une algèbre, $|A(\mathbf{v})|^2\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$ appartient à $H^2(\Omega)$. D'où $\mathrm{div}(|A(\mathbf{v})|^2 A(\mathbf{v}))$ est dans $H^1(\Omega)^3$. Alors, en raison du Lemme 5.1, $\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t))$ appartient à $H^1(\Omega)^3$. Ensuite pour chaque t, nous définissons $\mathbf{v}_m(t)$ dans V comme la solution du problème de Stokes:

$$\mathbf{v}_m(t) - \alpha_1\Delta\mathbf{v}_m(t) + \nabla q_m(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t). \qquad (3.8)$$

Comme au Paragraphe I.5, on montre que $\mathbf{v}_m(t)$ appartient à V_2 et que $\mathbf{u}_m(t)$ est solution de l'équation suivante, pour tout $1 \leq j \leq m$:

$$(\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{w}_j)_{V_2} + (\mathbf{v}_m(t), \mathbf{w}_j)_{V_2} = 0. \qquad (3.9)$$

Le théorème suivant est l'analogue du Théorème 2.4.

Théorème 3.2 *Supposons que* $\mathbf{f}$ *appartienne à* $L^2(0, T; H(\mathbf{rot}; \Omega)) \bigcap L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)$ *et que* Γ *soit de classe* $C^{3,1}$. *Alors* $y_m(t) = \|\mathbf{u}_m(t)\|_{V_2}^2$ *satisfait l'inégalité différentielle dans* $[0, T_m^*]$:

$$y'(t) \leq \frac{4\nu}{\alpha_1^2}(e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_m(0)\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\,ds)$$
$$+\frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)} - y(t))y(t)$$
$$+\frac{\beta C(\alpha_1)}{2\alpha_1^2}\|\,|A(\mathbf{u}_m(t))|\,\|_{L^4(\Omega)}^4 - \frac{4\nu}{\alpha_1^2}K_2\int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - \sqrt{y(s)}\,)\|\mathbf{u}_m(s)\|_V^2\,ds, \qquad (3.10)$$

où $C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ est définie par (2.18) et K_1 et K_2 sont définies dans le Lemme 2.2.

Démonstration. En multipliant les deux membres de (3.9) par $c_{j,m}(t)$ et en sommant par rapport à j, nous obtenons

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t))_{V_2} + (\mathbf{v}_m(t), \mathbf{u}_m(t))_{V_2} = 0.$$

Poser $\boldsymbol{\omega}_m(t) = \mathbf{rot}\ \mathbf{u}_m(t)$, $\mathbf{z}_m(t) = \boldsymbol{\omega}_m(t) - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}_m(t)$ et utiliser le fait que

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v}_m(t) - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}_m(t)) = \mathbf{rot}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t))$$

donnent

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{V_2} + (\mathbf{rot}\ \mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)), \mathbf{z}_m(t)) = (\mathbf{rot}\ \mathbf{f}(t), \mathbf{z}_m(t)). \tag{3.11}$$

En utilisant (I.5.11) et le Lemme 2.3 et en supprimant la variable t, pour simplifier les notations, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m\|^2_{V_2} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}_m\|^2_{V_2} - b(\mathbf{z}_m; \mathbf{u}_m, \mathbf{z}_m) + (\alpha_1 + \alpha_2)\{-b(\Delta \mathbf{u}_m; \boldsymbol{\omega}_m, \mathbf{z}_m) \\
+ b(\boldsymbol{\omega}_m; \Delta \mathbf{u}_m, \mathbf{z}_m) + 2\sum_{k=1}^{3}[b(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_m}{\partial x_k}; \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial x_k}, \mathbf{z}_m) - b(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial x_k}; \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_m}{\partial x_k}, \mathbf{z}_m) \\
+ (\nabla u_{km} \times \nabla \Delta u_{km}, \mathbf{z}_m)]\} - \beta\{2(\nabla(|A(\mathbf{u}_m)|^2).\nabla \boldsymbol{\omega}_m, \mathbf{z}_m) + (\mathbf{B}(\mathbf{u}_m), \mathbf{z}_m)\} \\
+ \frac{\beta}{\alpha_1}\|\,|A(\mathbf{u}_m)|\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)} = (\mathbf{rot}(\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u}_m), \mathbf{z}_m) + \frac{\beta}{\alpha_1}(|A(\mathbf{u}_m)|^2 \mathbf{rot}\,\mathbf{u}_m, \mathbf{z}_m).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Nous sommes exactement dans la même situation que dans le Théorème 2.4 et la même démonstration donne (3.10).
$\triangle$

Considérons une solution de (3.10) avec la valeur initiale

$$y(0) = \|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{V_2} = \|P_m(\mathbf{u}_0)\|^2_{V_2}.$$

Comme au Paragraphe I.5, si $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{f}$ satisfont (2.27), alors pour tout m suffisamment grand, $\mathbf{u}_m(0)$ et $\mathbf{f}$ satisferont l'analogue de (2.27):

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{V_2} + \frac{8\nu + C(\alpha_1)K_1}{2\alpha_1^2 K_1}(\|\mathbf{u}_m(0)\|^2_V + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt) + \frac{2\alpha_1}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
< \min\left(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}, \frac{K_1^2}{K_2^2}\right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

De là, la conclusion du Lemme 2.5 implique que $T^*_m = \infty$ et que $\mathbf{u}_m(t)$ est uniformément borné dans V_2 par rapport au temps:

$$\forall t \geq 0, \|\mathbf{u}_m(t)\|_{V_2} \leq \min\left(\sqrt{\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}}, \frac{K_1}{K_2}\right). \tag{3.14}$$

Alors l'équivalence de normes du Lemme I.2.1, (3.5) et (3.14) impliquent que la suite $\{\mathbf{u}_m\}_{m\geq 1}$ est bornée par rapport à m dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega)^3) \bigcap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)^3)$.

Le lemme suivant donne une borne pour $\mathbf{u}'_m(t)$.

Lemme 3.3 *Soient* $\mathbf{f}$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$ *et* $\mathbf{u}_0$ *dans* V_2. *Supposons que la suite* $\{\mathbf{u}_m\}_{m\geq 1}$ *soit bornée par rapport à* m *dans* $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega)^3) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)^3)$. *Alors la suite* $\{\mathbf{u}'_m\}_{m\geq 1}$ *est bornée par rapport à* m *dans* $L^2(\mathbb{R}^+; V)$.

Démonstration. Multiplions les deux membres de (3.2) par $c'_{jm}(t)$ et sommons par rapport à j. Cela donne

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}'_m(t)\|_V^2 = \nu(\Delta\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t)) - (\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m(t) - (2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}_m(t)) \times \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t)) \\ -(\alpha_1+\alpha_2)(b(\mathbf{u}_m(t); \Delta\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)) + 2b(\mathbf{u}_m(t); \Delta\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t))) \\ -\frac{\beta}{2}(|A(\mathbf{u}_m(t))|^2 A(\mathbf{u}_m(t)), A(\mathbf{u}'_m(t))) + (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}'_m(t)). \end{aligned} \tag{3.15}$$

En utilisant (I.4.3), l'équation (3.15) s'écrit

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}'_m(t)\|_V^2 = \nu(\Delta\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t)) - b(\mathbf{u}_m(t); \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t)) - \alpha_2 b(\mathbf{u}_m(t); \Delta\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t)) \\ -(2\alpha_1+\alpha_2)b(\mathbf{u}'_m(t); \Delta\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) - (\alpha_1+\alpha_2)b(\mathbf{u}_m(t); \Delta\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)) \\ -\frac{\beta}{2}(|A(\mathbf{u}_m(t))|^2 A(\mathbf{u}_m(t)), A(\mathbf{u}'_m(t))) + (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}'_m(t)). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Transformons le terme de grade 3:

$$\begin{aligned}(|A(\mathbf{u}_m(t))|^2 A(\mathbf{u}_m(t)), A(\mathbf{u}'_m(t))) &= \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}^2(\mathbf{u}_m(t))) \sum_{k,l=1}^3 A_{kl}(\mathbf{u}_m(t))(A_{kl}(\mathbf{u}_m(t)))'\,d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega (\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}^2(\mathbf{u}_m(t)))(\sum_{k,l=1}^3 A_{kl}^2(\mathbf{u}_m(t)))'\,d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{4}\int_\Omega ([\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}^2(\mathbf{u}_m(t))]^2)'\,d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

D'où

$$(|A(\mathbf{u}_m(t))|^2 A(\mathbf{u}_m(t)), A(\mathbf{u}'_m(t))) = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}(\||A(\mathbf{u}_m(t))|\|_{L^4(\Omega)}^4). \tag{3.17}$$

Substituant cette égalité et les inégalités (I.5.17)-(I. 5.20) dans (3.16), on obtient, ayant majoré $\sqrt{\mathcal{P}^2+1}$ par $\mathcal{P}^2+1$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}'_m(t)\|_V^2 + \frac{\beta}{8}\frac{d}{dt}(\||A(\mathbf{u}_m(t))|\|_{L^4(\Omega)}^4) \leq \nu|\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{u}'_m(t)|_{H^1(\Omega)} \\ +\|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}'_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + k\|\mathbf{u}_m(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{u}'_m(t)|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

avec

$$k = (\alpha_1 + |\alpha_2|)(C_1 + (2\sqrt{3}+1)(\mathcal{P}^2+1)C_2^{3/2}) + (\mathcal{P}^2+1)C_2^{3/2}.$$

Ensuite, grâce à (I.3.4) et à l'identité

$$ab \leq a^2 + \frac{1}{4}b^2,$$

on déduit

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}'_m(t)\|_V^2 + \frac{\beta}{8}\frac{d}{dt}(\||A(\mathbf{u}_m(t))|\|_{L^4(\Omega)}^4) \leq \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$+\frac{1}{\alpha_1}(\nu + k\|\mathbf{u}_m(t)\|_{H^3(\Omega)})^2|\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}^2.$$

L'intégration sur $\mathbb{R}^+$ donne

$$\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+;\,V)} \leq \frac{2}{\alpha_1}(\nu + k\|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;\,H^3(\Omega)^3)})^2\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+;\,H^1(\Omega)^3)}$$
$$+2\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+;\,L^2(\Omega)^3)} + \frac{\beta}{4}\||A(\mathbf{u}_m(0))|\|_{L^4(\Omega)}^4. \tag{3.18}$$

Mais, grâce à (I.2.15), (I.3.4) et (2.20), nous avons

$$\||A(\mathbf{u}_m(0))|\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq 16\|\nabla\mathbf{u}_m(0)\|_{L^\infty(\Omega)}^2|\mathbf{u}_m(0)|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{16C_1^2}{\alpha_1}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^+;\,H^3(\Omega)^3)}\|\mathbf{u}_0\|_V^2. \tag{3.19}$$

Alors les hypothèses du lemme et les inégalités (3.18) et (3.19) impliquent que la suite $\{u'_m\}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^+;V)$.
△

Le théorème suivant récapitule les majorations obtenues pour les suites $\{\mathbf{u}_m\}$ et $\{\mathbf{u}'_m\}$.

Théorème 3.4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, borné et simplement connexe, avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Soit la vitesse initiale $\mathbf{u}_0$ donnée dans V_2 et le membre de droite $\mathbf{f}$ donné dans $L^2(\mathbb{R}^+;H(\mathbf{rot};\Omega))\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2(\Omega)^3)$, suffisamment petits pour satisfaire*

$$\|\mathbf{u}_0\|_{V_2}^2 + \frac{8\nu + C(\alpha_1)K_1}{2\alpha_1^2K_1}(\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt) + \frac{2\alpha_1}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt$$
$$< \min\left(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}, \frac{K_1^2}{K_2^2}\right), \tag{3.20}$$

avec $C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ définie par (2.18) et K_1 et K_2 définies dans le Lemme 2.2. Alors pour tout m suffisamment grand, la solution unique $\mathbf{u}_m$ de la méthode de Galerkin (3.2), (3.3) existe pour tout temps $t \geq 0$ et satisfait les bornes supérieures:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;\,V_2)} &\leq \min\left(\sqrt{\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}}, \frac{K_1}{K_2}\right), \\ \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+;\,H^1(\Omega)^3)} &\leq k_1, \\ \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+;\,V)} &\leq k_2, \end{aligned} \tag{3.21}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes indépendantes de m.

Il reste à passer à la limite par rapport à m. Il suit de la première et de la dernière inégalité dans (3.21) qu'il existe une fonction $\mathbf{u}$ et une sous-suite de $\{\mathbf{u}_m\}$, encore notée $\{\mathbf{u}_m\}$, telles que

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+; V_2),$$

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}'_m = \mathbf{u}' \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^+; V) \text{ faible.}$$

Comme dans le Paragraphe I.5, d'une part, cela implique que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; V_2)} \leq \min\left(\sqrt{\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}}, \frac{K_1}{K_2}\right)$$

et, pour tout $T > 0$,

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ dans } H^1(0, T; H^1(\Omega)^3) \text{ faible.}$$

On montre alors que

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

D'autre part, des arguments de compacité (cf. [22]) impliquent

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ dans } L^2(0, T; H^2(\Omega)^3) \text{ fort}$$

et

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ dans } L^2(\Omega \times]0, T[)^3 \text{ fort.} \tag{3.22}$$

De là, on passe à la limite dans les termes de grade 2 de (3.2) comme au Paragraphe I.5. Il reste à passer à la limite dans le terme spécifique de grade 3. Grâce au Lemme 2.1 et à la définition (2.32), on a

$$\frac{1}{2}(|A(\mathbf{u}_m(t))|^2 A(\mathbf{u}_m(t)), A(\mathbf{w}_j)) = (\mathbf{K}(\mathbf{u}_m(t)), \mathbf{w}_j)$$

et, d'après (2.13),

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}_m(t)) = -|A(\mathbf{u}_m(t))|^2 \Delta\, \mathbf{u}_m(t) - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{u}_m(t))|^2) A_{.,k}(\mathbf{u}_m(t)).$$

Montrons,tout d'abord, que $\mathbf{K}(\mathbf{u}_m(t))$ est borné dans $L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$. Le fait que $\{\mathbf{u}_m\}$ soit borné dans $L^\infty(0, T; V_2)$ implique d'une part

$$|A(\mathbf{u}_m)| \text{ borné dans } L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$$

et d'autre part

$$\Delta\, \mathbf{u}_m \text{ borné dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

Donc on a

$$|A(\mathbf{u}_m)|^2 \Delta\, \mathbf{u}_m \text{ borné dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

De même, on a

$$|A(\mathbf{u}_m)|A_{ij}(\mathbf{u}_m) \text{ borné dans } L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_k}|A(\mathbf{u}_m)| \text{ borné dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)^3).$$

Donc on obtient

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{u}_m)|^2)A_{.,k}(\mathbf{u}_m) \text{ borné dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)^3).$$

D'où $\{\mathbf{K}(\mathbf{u}_m)\}$ est borné dans l'espace réflexif $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$, ce qui implique

$$\lim_{m\to\infty}\mathbf{K}(\mathbf{u}_m)=\mathbf{\Psi} \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)^3) \text{ faible.} \tag{3.23}$$

Il reste à montrer que $\mathbf{\Psi}=\mathbf{K}(\mathbf{u})$. Nous utiliserons le lemme suivant qui établit l'hémicontinuité en 0 de l'opérateur $\mathbf{K}$ (cf. [22]).

Lemme 3.5 *Soit* $\mathbf{K}$ *l'opérateur défini par (2.32). Pour tout* $\mathbf{u}$ *dans* $H^3(\Omega)^3$*, tout* $\mathbf{w}$ *dans* $H^3(\Omega)^3$ *et tout* $\mathbf{v}$ *dans* $H_0^1(\Omega)^3$*,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbf{K}(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{w}),\mathbf{v})=(\mathbf{K}(\mathbf{u}),\mathbf{v}).$$

Démonstration. Grâce au Lemme 2.1, on peut écrire

$$\begin{aligned}(\mathbf{K}(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{w}),\mathbf{v})-(\mathbf{K}(\mathbf{u}),\mathbf{v}) &= \frac{1}{2}(|A(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{w})|^2A(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{w}),A(\mathbf{v}))-\frac{1}{2}(|A(\mathbf{u})|^2A(\mathbf{u}),A(\mathbf{v}))\\ &= \frac{1}{2}((|A(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{w})|^2-|A(\mathbf{u})|^2)A(\mathbf{u}),A(\mathbf{v}))+\frac{\varepsilon}{2}(|A(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{w})|^2A(\mathbf{w}),A(\mathbf{v}))\\ &= \frac{\varepsilon}{2}[(A(\mathbf{u})\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}(\mathbf{w})A_{ij}(2\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{w})+|A(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{w})|^2A(\mathbf{w}),A(\mathbf{v}))].\end{aligned} \tag{3.24}$$

On fait tendre ε vers 0, on peut donc supposer $|\varepsilon|\le 1$. Alors, (2.20) et (I.2.15) donnent

$$\begin{aligned}&|(A(\mathbf{u})\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}(\mathbf{w})A_{ij}(2\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{w})+|A(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{w})|^2A(\mathbf{w}),A(\mathbf{v}))|\\ &\le 16C_1^2|\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}(|\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)}+|\mathbf{w}|_{H^1(\Omega)})(\|\mathbf{u}\|_{H^3(\Omega)}+\|\mathbf{w}\|_{H^3(\Omega)})^2.\end{aligned}$$

Dans (3.24), l'expression entre crochets est donc bornée. De là le résultat du lemme.
$\triangle$

Pour tout $\mathbf{w}$ dans $L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3\cap H_0^1(\Omega)^3)$ et tout $\varepsilon>0$, (2.33) implique

$$\int_0^T(\mathbf{K}(\mathbf{u}_m(t))-\mathbf{K}(\mathbf{u}(t)-\varepsilon\mathbf{w}(t)),\mathbf{u}_m(t)-\mathbf{u}(t)+\varepsilon\mathbf{w}(t))\,dt\ge 0. \tag{3.25}$$

D'après (3.22), nous obtenons

$$\mathbf{u}_m-\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{w}\to\varepsilon\mathbf{w} \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)^3) \text{ fort.}$$

De là, avec en plus (3.23), on passe à la limite par rapport à m dans (3.25), ce qui donne

$$\int_0^T (\mathbf{\Psi}(t), \mathbf{w}(t))\, dt \geq \int_0^T (\mathbf{K}(\mathbf{u}(t) - \varepsilon \mathbf{w}(t)), \mathbf{w}(t))\, dt.$$

On fait tendre ε vers 0 dans l'inéquation précédente. Le Lemme 3.5, avec le théorème de convergence dominée, implique

$$\int_0^T (\mathbf{\Psi}(t), \mathbf{w}(t))\, dt \geq \int_0^T (\mathbf{K}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{w}(t))\, dt.$$

En changeant $\mathbf{w}$ en $-\mathbf{w}$, on obtient, pour tout $\mathbf{w}$ dans $L^\infty(0,T; H^3(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3)$,

$$\int_0^T (\mathbf{\Psi}(t) - \mathbf{K}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{w}(t))\, dt = 0.$$

Finalement, la densité de $\mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)^3$ dans $L^2(0,T; L^2(\Omega)^3)$ implique

$$\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{K}(\mathbf{u}(t)) \text{ pour presque tout t} \in [0,T].$$

D'où

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{K}(\mathbf{u}_m) = \mathbf{K}(\mathbf{u}) \text{ dans } L^2(0,T; L^2(\Omega)^3) \text{ faible}$$

et de là, pour tout $\psi \in L^2(0,T)$,

$$\int_0^T (\mathbf{K}(\mathbf{u}_m(t)), \mathbf{w}_j)\psi(t)\, dt \to \int_0^T (\mathbf{K}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{w}_j)\psi(t)\, dt.$$

De là, on passe à la limite dans (3.2) et on déduit que $\mathbf{u}$ est solution du problème (2.3), (1.9) et puisque cette solution est unique, la suite entière $\mathbf{u}_m$ converge vers $\mathbf{u}$. Ceci établit le principal théorème de ce paragraphe.

Théorème 3.6 *Sous les hypothèses du Théorème 3.4, le problème (2.3), (1.9) a une et une seule solution* $\mathbf{u}$ *qui existe pour tout temps* $t \geq 0$. *De plus,* $\mathbf{u}$ *appartient à* $L^\infty(I\!R^+; V_2)$, $\mathbf{u}'$ *à* $L^2(I\!R^+; V)$ *et* $\mathbf{u}$ *est uniformément borné dans* V_2 *par rapport au temps:*

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(I\!R^+; V_2)} \leq \min\left(\sqrt{\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}}, \frac{K_1}{K_2}\right), \tag{3.26}$$

où $C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ *est définie par (2.18) et* K_1 *et* K_2 *sont définies dans le Lemme 2.2.*

4 Régularité additionnelle

Dans ce paragraphe, nous supposons que le problème (2.3), (1.9) a une solution $\mathbf{u}$ dans $L^\infty(0,T; V_2)$ avec $\mathbf{u}'$ dans $L^2(0,T; V)$, qui n'est pas nécessairement globale. Prenons $\mathbf{f}$ et $\mathbf{rot\ f}$ dans $L^1(0,T; H^1(\Omega)^3)$, $\mathbf{u}_0$ dans $H^4(\Omega)^3 \cap V$ et $\Gamma = \bigcup_{i=0}^p \Gamma_i$ (Γ_i *connexe*) de classe $C^{3,1}$. Comme dans le Paragraphe I.6, en utilisant la Remarque I.2.3, nous nous proposons de montrer que $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T; H^4(\Omega)^3)$.

4.1 Une équation de transport

Nous allons utiliser, non seulement l'application $\mathbf{g}$ définie par (I.6.1), mais aussi une autre application notée $\mathbf{l}$, définie, pour tout $\mathbf{z}$ dans $L^2(\Omega)^3$, par

$$\mathbf{l}(\mathbf{z}) = \mathbf{v_z}, \tag{4.1}$$

où $\mathbf{v_z}$ est défini dans le Paragraphe I.6.1. On peut remarquer que $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{rot}\,\mathbf{l}(\mathbf{z})$. Si, d'après le Lemme I.6.1, $\mathbf{g}(\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})) = \mathbf{rot}\,\mathbf{u}$, la démonstration de ce lemme montre aussi que, pour tout $\mathbf{u}$ dans V_2,

$$\mathbf{l}(\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})) = \mathbf{u}. \tag{4.2}$$

Ensuite, avec C' remplacée par $\sqrt{2}C'$ et C'' remplacée par $\sqrt{2}C''$, c'est-à-dire que l'on pose maintenant $C' = C_1'C_2'$ et $C'' = C_4''C_3''C_2''$ avec les notations du Paragraphe I.6.1, les majorations (I.6.2) et (I.6.3) donnent

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|_{H^2(\Omega)} \leq \sqrt{2}\,C'\|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.3}$$

et

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|_{H^3(\Omega)} \leq \sqrt{2}\,C''\|\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.4}$$

De même, considérant le Paragraphe I.6.1 et notamment la démonstration du Lemme I.6.3, il est clair que $\mathbf{l}$ est un opérateur linéaire continu de $L^2(\Omega)^3$ dans $H^3(\Omega)^3$ et de $H^1(\Omega)^3$ dans $H^4(\Omega)^3$ avec les majorations

$$\|\mathbf{l}(\mathbf{z})\|_{H^3(\Omega)} \leq C'\|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.5}$$

et

$$\|\mathbf{l}(\mathbf{z})\|_{H^4(\Omega)} \leq C''\|\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.6}$$

De l'équation (2.16), utilisant les applications $\mathbf{g}$ et $\mathbf{l}$, nous déduirons une équation de transport dont $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})$ est une solution particulière dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$. Puis nous montrerons que cette équation a une solution dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et, enfin, qu'elle n'a pas plus d'une solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$. Par conséquent, l'unique solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ est $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$. De là, $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$.

Nous allons transformer l'équation (2.16) en une équation plus adéquate. Tout d'abord, en utilisant (I.6.7), (I.6.8) et (I.6.9) dans l'équation de transport (2.16), nous obtenons l'équation suivante, qui a les mêmes termes de grade 2 que l'équation (I.6.10):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{u}.\nabla(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) - \frac{3\alpha_1 + 2\alpha_2}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}).\nabla\mathbf{u} \\
&\quad +(\alpha_1+\alpha_2)[\nabla(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega}.\mathbf{rot}\ \mathbf{u}) - \frac{1}{\alpha_1}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{rot}\,\mathbf{u} + 2\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k} \\
&\quad -\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k} - \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k} \times \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega})] + \beta[\frac{1}{\alpha_1}|A(\mathbf{u})|^2(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) - 2\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\,\boldsymbol{\omega} \\
&\quad -\mathbf{B}(\mathbf{u})] = \mathbf{rot}\ \mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\ \mathbf{u} - 2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\ \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} + \frac{\beta}{\alpha_1}|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Il reste à récrire $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ à l'aide de $\mathbf{g}$ et $\mathbf{l}$. A partir de (2.10), on obtient

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = 2\sum_{i,j,k=1}^{3}[\nabla(A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial}{\partial x_k}(A_{ij}(\mathbf{u}))) \times A_{.,k}(\mathbf{u}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(A_{ij}(\mathbf{u}))A_{ij}(\mathbf{u})\nabla((\mathbf{rot}\,\mathbf{u})_k)].$$

On pose alors, pour tout $\mathbf{u}$ et tout $\mathbf{v}$ dans V_2 et tout $\mathbf{z}$ dans $L^2(\Omega)^3$,

$$\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z}) = 2\sum_{i,j,k=1}^{3}[\nabla(A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial}{\partial x_k}(A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z})))) \times A_{.,k}(\mathbf{v}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(A_{ij}(\mathbf{u}))A_{ij}(\mathbf{v})\nabla((\mathbf{g}(\mathbf{z}))_k)]. \tag{4.8}$$

L'application $\mathbf{L}$ est trilinéaire. Du Lemme I.6.1 et de (4.2), on déduit, pour tout $\mathbf{u}$ dans V_2,

$$\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{rot}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})) = \mathbf{B}(\mathbf{u}). \tag{4.9}$$

Puisque nous savons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.3), (1.9) existe, l'équation (4.7), dans laquelle, grâce à (4.9), $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ est remplacé par l'expression équivalente $\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\boldsymbol{\omega}-\alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega})$, nous conduit à résoudre l'équation de transport suivante, obtenue en remplaçant $\boldsymbol{\omega}-\alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}$ par $\mathbf{z}$ et $\boldsymbol{\omega}$ par $\mathbf{g}(\mathbf{z})$:

Pour $\mathbf{u}$ donné dans $L^\infty(0,T;V_2)$, $\mathbf{u}_0$ donné dans $H^4(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ donné tel que $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartienne à $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$, chercher $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ solution de:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial t} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{z} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{z} - \frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{z}.\nabla\mathbf{u} + (\alpha_1+\alpha_2)[\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})\\
&-\frac{1}{\alpha_1}\mathbf{z}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + 2\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}).\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}) - \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}))]\\
&+\frac{\beta}{\alpha_1}|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{z} - 2\beta\,\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\,\mathbf{g}(\mathbf{z}) - \beta\,\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z})\\
&= \mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u} - 2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} + \frac{\beta}{\alpha_1}|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u},
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{rot}(\mathbf{u}_0 - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_0). \tag{4.11}$$

Rappelons que, par construction de (4.10), $\mathbf{u}$ étant solution dans $L^\infty(0,T;V_2)$ de (2.3), (1.9), avec $\mathbf{u}'$ dans $L^2(0,T;V)$, alors $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})$ est solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ de (4.10), (4.11).

4.2 Existence de solution dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ de l'équation de transport

On discrétise le problème (4.10), (4.11) de la même manière qu'au Paragraphe I.6.3, les fonctions propres $\mathbf{w}_j$ étant définies par l'équation (I.6.13). Ainsi, le problème discrétisé s'écrit:

Chercher

$$\mathbf{z}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{j,m}(t)\mathbf{w}_j,$$

solution, pour $1 \leq j \leq m$, de

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{z}'_m(t), \mathbf{w}_j) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\mathbf{z}_m(t), \mathbf{w}_j) + b(\mathbf{u}(t); \mathbf{z}_m(t), \mathbf{w}_j) \\
&-\frac{3\alpha_1 + 2\alpha_2}{\alpha_1} b(\mathbf{z}_m(t); \mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j) + (\alpha_1 + \alpha_2)\{(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)), \mathbf{w}_j) \\
&-\frac{1}{\alpha_1}(\mathbf{z}_m(t) \times \mathbf{rot}\ \mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j) + 2\sum_{k=1}^{3}[b(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)); \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_k}, \mathbf{w}_j) \\
&-b(\frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_k}; \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)), \mathbf{w}_j) - (\frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_k} \times \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)), \mathbf{w}_j)]\} \\
&+\beta(\frac{1}{\alpha_1}|A(\mathbf{u}(t))|^2\mathbf{z}_m(t) - 2\nabla(|A(\mathbf{u}(t))|^2).\nabla\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)) - \mathbf{L}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}_m(t)), \mathbf{w}_j) \\
&= (\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t) + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t) - 2\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t).\nabla\mathbf{u}(t) + \frac{\beta}{\alpha_1}|A(\mathbf{u}(t))|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j), \quad (4.12)
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{z}_m(0) = P_m(\mathbf{z}(0)). \quad (4.13)
$$

Le problème (4.12), (4.13) est un système de m équations différentielles linéaires d'ordre un, avec une condition initiale au temps $t = 0$. Il est du même type que le système (I.6.14), (I.6.15) et il admet une solution $\mathbf{z}_m(t)$, unique et continue sur tout l'intervalle $[0, T]$.

Le lemme suivant donne trois majorations que nous utiliserons fréquemment.

Lemme 4.1 *Soit la matrice $A(\mathbf{v})$ définie par (2.1). Pour tout $\mathbf{v}$ dans $H^3(\Omega)^3$,*

$$
\|A(\mathbf{v})\|_{L^\infty(\Omega)} = \||A(\mathbf{v})|\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2C_1\|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)},
$$

$$
\|\nabla\, A(\mathbf{v})\|_{H^1(\Omega)} \leq 2\|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)},
$$

$$
\|\nabla\, A(\mathbf{v})\|_{L^4(\Omega)} \leq 2C_2^{3/4}\|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)}.
$$

Démonstration. Ces majorations se déduisent principalement de $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ et de la symétrie de la matrice $A(\mathbf{v})$. Pour la première, on utilise aussi (I.2.6) et (I.2.15) et on obtient

$$
\begin{aligned}
\|A(\mathbf{v})\|^2_{L^\infty(\Omega)} = \||A(\mathbf{v})|\|^2_{L^\infty(\Omega)} &\leq 4\|\nabla\,\mathbf{v}\|^2_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq 4C_1^2\|\mathbf{v}\|^2_{H^3(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Pour la seconde majoration, on utilise les mêmes arguments. Ainsi

$$
\|\nabla\, A(\mathbf{v})\|^2_{H^1(\Omega)} \leq 4(\|\partial^2\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial^3\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)}) \leq 4\|\mathbf{v}\|^2_{H^3(\Omega)}.
$$

Utilisant (I.2.16), la troisième majoration se déduit de la seconde.
$\triangle$

Lemme 4.2 *Supposons que* $\mathbf{u}$ *appartienne à* $L^\infty(0,T;V_2)$ *et que* $\mathbf{f}$ *soit tel que* $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ *appartienne à* $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$. *Alors la solution* $\mathbf{z}_m(t)$ *de (4.12), (4.13) est bornée comme suit:*

$$\forall t \in [0,T],\ \|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq e^{K_T t}(\|\mathbf{z}_m(0)\|_{H^1(\Omega)} + C_T), \tag{4.14}$$

où K_T *et* C_T *sont deux constantes qui dépendent de* T, *mais non de* m.

Démonstration. Multipliant les deux membres de (4.12) par $\lambda_j c_{j,m}(t)$, appliquant (I.6.13) et sommant par rapport à j, on obtient, après avoir supprimé la variable t pour simplifier les notations,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{z}_m\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{z}_m\|^2_{H^1(\Omega)} + (\nabla(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m),\nabla\mathbf{z}_m) - \frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{\alpha_1}[(\nabla(\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u}),\nabla\mathbf{z}_m)\\
&+(\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u},\mathbf{z}_m)] + (\alpha_1+\alpha_2)\{(\nabla(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})),\nabla\mathbf{z}_m) + (\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}),\mathbf{z}_m)\\
&-\frac{1}{\alpha_1}(\nabla(\mathbf{z}_m\times\mathbf{rot}\,\mathbf{u}),\nabla\mathbf{z}_m) + 2\sum_{k=1}^{3}[(\nabla(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}),\nabla\mathbf{z}_m)\\
&+(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k},\mathbf{z}_m) - (\nabla(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)),\nabla\mathbf{z}_m) - (\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)\\
&-(\nabla(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)),\nabla\mathbf{z}_m) - (\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)]\}\\
&+\beta[\frac{1}{\alpha_1}(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{z}_m),\nabla\mathbf{z}_m) + \frac{1}{\alpha_1}(|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{z}_m,\mathbf{z}_m) - 2(\nabla(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)),\nabla\mathbf{z}_m)\\
&-2(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m) - (\nabla(\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}_m)),\nabla\mathbf{z}_m) - (\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)]\\
&= (\mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u} - 2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} + \frac{\beta}{\alpha_1}|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u},\mathbf{z}_m)_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}\tag{4.15}$$

Nous avons déja majoré les termes de grade 2 et notamment le terme $(\nabla(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m),\nabla\,\mathbf{z}_m)$, qui fait intervenir la dérivée seconde de $\mathbf{z}_m$. Il nous reste les termes spécifiques de grade 3. Remarquons tout d'abord que

$$(|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{z}_m,\mathbf{z}_m) = \||A(\mathbf{u})|\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

Ce terme étant positif, nous pouvons le laisser dans le premier membre et, ensuite, le négliger. De même

$$(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{z}_m),\nabla\,\mathbf{z}_m) = \||A(\mathbf{u})|\nabla\,\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\sum_{l,k,j=1}^{3}(A_{lk}(\mathbf{u})\frac{\partial A_{lk}(\mathbf{u})}{\partial x_j}\mathbf{z}_m,\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_j})$$

et, puisque le premier terme du membre de droite est positif, nous avons seulement à majorer

$$2\sum_{l,k,j=1}^{3}(A_{lk}(\mathbf{u})\frac{\partial A_{lk}(\mathbf{u})}{\partial x_j}\mathbf{z}_m,\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_j}). \tag{4.16}$$

Ensuite, considérons les autres termes du membre de gauche de (4.15). Tout d'abord nous avons les termes,

$$|(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)|,\ \ |(\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)|.$$

Montrons qu'il sont majorés par des termes de la forme $C\,\|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)}$, où C dépend de C_1, C_2 et C'.

Majoration de $|(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)|$.

$$|(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)| = |b(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2);\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)|.$$

D'où, du Lemme I.3.5, nous déduisons

$$\begin{aligned}|(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)| &\le \|\nabla(|A(\mathbf{u})|^2)\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{L^4(\Omega)}\|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le 2\|A(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla(A(\mathbf{u}))\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{L^4(\Omega)}\|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Alors (I.2.16), (4.3) et le Lemme 4.1 impliquent

$$|(\nabla(|A(\mathbf{u}(t))|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)),\mathbf{z}_m(t))| \le 8\sqrt{2}C_1C_2^{3/2}C'\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.17}$$

Majoration de $|(\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}_m),\mathbf{z}_m)|$.

Développons $\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}_m)$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}_m) = 2\sum_{i,j,k=1}^{3}[A_{ij}(\mathbf{u})\nabla\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))}{\partial x_k}\times A_{.,k}(\mathbf{u})\\ +\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))}{\partial x_k}\nabla A_{ij}(\mathbf{u})\times A_{.,k}(\mathbf{u}) - \frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}A_{ij}(\mathbf{u})\nabla\,(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_k].\end{aligned} \tag{4.18}$$

Nous avons donc trois termes à majorer. Pour le premier terme, du Lemme I.3.4 et de Cauchy-Schwarz, nous déduisons

$$\begin{aligned}&\|\sum_{i,j,k=1}^{3}A_{ij}(\mathbf{u})\nabla\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))}{\partial x_k}\times A_{.,k}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le \sum_{i,j=1}^{3}\|A_{ij}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}|A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))|_{H^2(\Omega)}\|A(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

Alors par Cauchy-Schwarz encore, le Lemme 4.1 et (4.5) donnent

$$\|\sum_{i,j,k=1}^{3}[A_{ij}(\mathbf{u})\nabla\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))}{\partial x_k}\times A_{.,k}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \le 8\,C_1^2C'\|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.19}$$

Pour le deuxième terme, par les mêmes arguments, on obtient

$$\begin{aligned}&\|\sum_{i,j,k=1}^{3}\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))}{\partial x_k}\nabla A_{ij}(\mathbf{u})\times A_{.,k}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C_2^{3/2}\|\nabla A(\mathbf{u})\|_{H^1(\Omega)}\sum_{k=1}^{3}\|\frac{\partial A(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))}{\partial x_k}\|_{H^1(\Omega)}\|A_{.,k}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)},\end{aligned}$$

puis

$$\| \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))}{\partial x_k} \nabla A_{ij}(\mathbf{u}) \times A_{.,k}(\mathbf{u}) \|_{L^2(\Omega)} \leq 8\, C_2^{3/2} C_1 C' \|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)} \|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.20}$$

Pour le troisième terme, on a

$$\begin{aligned} &\| \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k} A_{ij}(\mathbf{u}) \nabla\, (\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_k \|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{i,j,k=1}^{3} \| \frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k} \|_{L^4(\Omega)} \| \nabla\, (\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_k \|_{L^4(\Omega)} \| A_{ij}(\mathbf{u}) \|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Puis, de (I.2.16) et de Cauchy-Schwarz, on déduit

$$\| \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k} A_{ij}(\mathbf{u}) \nabla\, (\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_k \|_{L^2(\Omega)} \leq C_2^{3/2} \| \nabla \mathbf{g}(\mathbf{z}_m) \|_{H^1(\Omega)} \| A(\mathbf{u}) \|_{L^\infty(\Omega)} \| \nabla\, A(\mathbf{u}) \|_{H^1(\Omega)}.$$

Alors le Lemme 4.1 et (4.3) impliquent

$$\| \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k} A_{ij}(\mathbf{u}) \nabla\, (\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_k \|_{L^2(\Omega)} \leq 4\sqrt{2}\, C_2^{3/2} C_1 C' \|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)} \|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.21}$$

Considérant (4.18) et rassemblant les inégalités (4.19), (4.20) et (4.21), nous obtenons

$$|(\mathbf{L}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}_m(t)), \mathbf{z}_m(t))| \leq 8 C_1 C' (2C_1 + (2+\sqrt{2}) C_2^{3/2}) \|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)} \|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.22}$$

Nous allons montrer que les termes restants non positifs du membre de gauche sont majorés par des expressions du type

$$C\, \|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)} \|\mathbf{z}_m\|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)},$$

où C dépend de C_1, C_2 et C''.

<u>Majoration de $|2 \sum_{l,k,j=1}^{3} (A_{lk}(\mathbf{u}) \frac{\partial A_{lk}(\mathbf{u})}{\partial x_j} \mathbf{z}_m, \frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_j})|$.</u>

Par Hölder et Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|2 \sum_{l,k,j=1}^{3} (A_{lk}(\mathbf{u}) \frac{\partial A_{lk}(\mathbf{u})}{\partial x_j} \mathbf{z}_m, \frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_j})| \leq 2 \|A(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\, A(\mathbf{u})\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{z}_m\|_{L^4(\Omega)} |\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}.$$

Puis, du Lemme 4.1 et de (I.2.16), on déduit

$$\begin{aligned} &|2 \sum_{l,k,j=1}^{3} (A_{lk}(\mathbf{u}(t)) \frac{\partial A_{lk}(\mathbf{u}(t))}{\partial x_j} \mathbf{z}_m(t), \frac{\partial \mathbf{z}_m(t)}{\partial x_j})| \\ &\leq 8 C_1 C_2^{3/2} \|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)} \|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Majoration de $|(\nabla(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)),\nabla\,\mathbf{z}_m)|$.

Développons $(\nabla(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)),\nabla\,\mathbf{z}_m)$.

$$(\nabla(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)),\nabla\,\mathbf{z}_m) = 2\sum_{i,k,l=1}^{3}[b(\frac{\partial A_{lk}(\mathbf{u})}{\partial x_i}\nabla\,A_{lk}(\mathbf{u});\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_i})$$
$$+b(A_{lk}(\mathbf{u})\nabla(\frac{\partial A_{lk}(\mathbf{u})}{\partial x_i});\mathbf{g}(\mathbf{z}_m),\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_i}) + b(A_{lk}(\mathbf{u})\nabla\,A_{lk}(\mathbf{u});\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_i},\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_i})].$$

Utilisant le Lemme I.3.5, Cauchy-Schwarz et (I.2.16) , on obtient

$$|(\nabla(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)),\nabla\,\mathbf{z}_m)| \leq 2|\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}[C_2^{3/2}\|\nabla\,A(\mathbf{u})\|^2_{H^1(\Omega)}\|\nabla\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{L^\infty(\Omega)}$$
$$+\|A(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}(\|\partial^2 A(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{L^\infty(\Omega)} + C_2^{3/2}\|\nabla\,A(\mathbf{u})\|_{H^1(\Omega)}\|\partial^2\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{H^1(\Omega)})].$$

Alors le Lemme 4.1 et (4.4) donnent

$$\begin{aligned}&|(\nabla(\nabla(|A(\mathbf{u}(t))|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t))),\nabla\,\mathbf{z}_m(t))|\\ &\leq 8\sqrt{2}\,C_1C''(2C_2^{3/2}+C_1)\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Dans le premier membre, il reste à majorer $|(\nabla(\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}_m)),\nabla\mathbf{z}_m)|$.

Majoration de $|(\nabla(\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}_m)),\nabla\mathbf{z}_m)|$.

Nous avons, à partir de (4.8),

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}_m)) = 2\sum_{i,j,k=1}^{3}&[\nabla(\nabla\,(A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)))\times A_{.,k}(\mathbf{u}))\\ &-\nabla(\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}A_{ij}(\mathbf{u})\nabla\,(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_k)].\end{aligned}\tag{4.25}$$

Développons le premier terme du membre de droite de cette égalité:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_l}(\nabla\,(A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)))\times A_{.,k}(\mathbf{u})) = \frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_l}\nabla\,\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))\times A_{.,k}(\mathbf{u})\\ &+\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))\nabla\,\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_l}\times A_{.,k}(\mathbf{u}) + A_{ij}(\mathbf{u})\nabla(\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x_k\partial x_l}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)))\times A_{.,k}(\mathbf{u})\\ &+\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x_k\partial x_l}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))\nabla\,A_{ij}(\mathbf{u})\times A_{.,k}(\mathbf{u}) + A_{ij}(\mathbf{u})\nabla(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)))\times\frac{\partial A_{.,k}(\mathbf{u})}{\partial x_l}\\ &\quad+\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))\nabla\,A_{ij}(\mathbf{u})\times\frac{\partial A_{.,k}(\mathbf{u})}{\partial x_l}.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Majorons les six termes issus de ce développement. Les quatre premières majorations découleront de Cauchy-Schwarz, de Hölder, de (I.2.16), de (I.2.15), du Lemme I.3.4, du

Lemme 4.1 et de (4.6). Détaillons la première. Les inégalités de Hölder, de Cauchy-Schwarz, (I.2.16) et le Lemme I.3.4 donnent

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{i,j,k,l=1}^{3}(\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_l}\nabla \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)) \times A_{.,k}(\mathbf{u}), \frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l})| \\
&\le C_2^{3/2}\sum_{k,l=1}^{3}\|\frac{\partial A(\mathbf{u})}{\partial x_l}\|_{H^1(\Omega)}\|\nabla(\frac{\partial}{\partial x_k}A(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)))\|_{H^1(\Omega)}\|A_{.,k}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l}\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

puis, par des procédés analogues à ceux de la démonstration du Lemme 4.1, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{i,j,k,l=1}^{3}(\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_l}\nabla \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)) \times A_{.,k}(\mathbf{u}), \frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l})| \\
&\le 4\,C_2^{3/2}\sum_{l=1}^{3}(\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l}\|_{H^2(\Omega)}\|\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l}\|_{L^2(\Omega)})\sum_{k=1}^{3}(\|\frac{\partial \mathbf{l}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}\|_{H^3(\Omega)}\|A_{.,k}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}).
\end{aligned}
$$

Enfin, Cauchy-Schwarz, le Lemme 4.1 et (4.6) impliquent

$$
\begin{aligned}
&|(\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_l}A_{ij}(\mathbf{u}(t))\nabla \frac{\partial}{\partial x_k}A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m(t))) \times A_{.,k}(\mathbf{u}(t)), \frac{\partial \mathbf{z}_m(t)}{\partial x_l})| \\
&\le 8\,C_2^{3/2}C_1C''\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}^2\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Par les mêmes procédés, on obtient

$$
\begin{aligned}
&|(\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m(t)))\nabla \frac{\partial}{\partial x_l}A_{ij}(\mathbf{u}(t)) \times A_{.,k}(\mathbf{u}(t)), \frac{\partial \mathbf{z}_m(t)}{\partial x_l})| \\
&\quad\le 8\,C_1^2C''\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}^2\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

$$
\begin{aligned}
&|(\sum_{i,j,k,l=1}^{3}A_{ij}(\mathbf{u}(t))\nabla(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m(t)))) \times A_{.,k}(\mathbf{u}(t)), \frac{\partial \mathbf{z}_m(t)}{\partial x_l})| \\
&\quad\le 8\,C_1^2C''\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}^2\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

$$
\begin{aligned}
&|(\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m(t)))\nabla A_{ij}(\mathbf{u}(t)) \times A_{.,k}(\mathbf{u}(t)), \frac{\partial \mathbf{z}_m(t)}{\partial x_l})| \\
&\le 8\,C_2^{3/2}C_1C''\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}^2\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Ensuite, pour le cinquième terme, le Lemme I.3.4, puis (I.2.16) donnent

$$
\begin{aligned}
&|(\sum_{i,j,k,l=1}^{3}A_{ij}(\mathbf{u})\nabla(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))) \times \frac{\partial A_{.,k}(\mathbf{u})}{\partial x_l}, \frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l})| \\
&\le |\sum_{k,l=1}^{3}\|\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}(\mathbf{u})\nabla(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)))\|_{L^4(\Omega)}\|\frac{\partial A_{.,k}(\mathbf{u})}{\partial x_l}\|_{L^4(\Omega)}\|\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l}\|_{L^2(\Omega)}| \\
&\le |\sum_{k,l=1}^{3}C_2^{3/2}\|\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}(\mathbf{u})\nabla(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)))\|_{H^1(\Omega)}\|\frac{\partial A_{.,k}(\mathbf{u})}{\partial x_l}\|_{H^1(\Omega)}\|\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l}\|_{L^2(\Omega)}|.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

Pour majorer $\| \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(\mathbf{u})\nabla(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)))\|_{H^1(\Omega)}$, on utilise l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, ce qui donne

$$|\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(\mathbf{u})\nabla(\frac{\partial}{\partial x_k} A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)))|^2_{H^1(\Omega)} \leq 2\sum_{q=1}^{3}[\| \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_q}\nabla(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)))\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\| \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(\mathbf{u})\nabla(\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x_k \partial x_q}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)))\|^2_{L^2(\Omega)}].$$

Alors Cauchy-Schwarz, (I.2.16) et le Lemme I.4.1 impliquent

$$\| \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(\mathbf{u})\nabla(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)))\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|A(\mathbf{u})\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla(A(\frac{\partial \mathbf{l}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}))\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+2[C_2^3\|\nabla A(\mathbf{u})\|^2_{H^1(\Omega)}\|\nabla A(\frac{\partial \mathbf{l}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k})\|^2_{H^1(\Omega)} + \|A(\mathbf{u})\|^2_{L^\infty(\Omega)}|\nabla(A(\frac{\partial \mathbf{l}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}))|^2_{H^1(\Omega)}]$$
$$\leq 16\|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)}(C_1^2|\frac{\partial \mathbf{l}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}|^2_{H^2(\Omega)} + 2C_2^3\|\frac{\partial \mathbf{l}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}\|^2_{H^3(\Omega)} + 2C_1^2|\frac{\partial \mathbf{l}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}|^2_{H^3(\Omega)}).$$

De là

$$\| \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(\mathbf{u})\nabla(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m)))\|_{H^1(\Omega)} \leq 4\sqrt{2}(C_1 + C_2^{3/2})\|\mathbf{u}\|_{H^3(\Omega)}\|\frac{\partial \mathbf{l}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}\|_{H^3(\Omega)}.$$

Substituant cette dernière inégalité dans (4.31), on obtient

$$|(\sum_{i,j,k,l=1}^{3} A_{ij}(\mathbf{u})\nabla(\frac{\partial}{\partial x_k} A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m))) \times \frac{\partial}{\partial x_l} A_{.,k}(\mathbf{u}), \frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l})|$$
$$\leq 4\sqrt{2}\, C_2^{3/2}(C_1 + C_2^{3/2})\|\mathbf{u}\|_{H^3(\Omega)} \sum_{k,l=1}^{3}(\|\frac{\partial \mathbf{l}(\mathbf{z}_m)}{\partial x_k}\|_{H^3(\Omega)}\|\frac{\partial}{\partial x_l} A_{.,k}(\mathbf{u})\|_{H^1(\Omega)}\|\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l}\|_{L^2(\Omega)}).$$

Enfin Cauchy-Schwarz, le Lemme 4.1 et (4.6) donnent

$$|(\sum_{i,j,k,l=1}^{3} A_{ij}(\mathbf{u}(t))\nabla(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m(t)))) \times \frac{\partial A_{.,k}(\mathbf{u}(t))}{\partial x_l}, \frac{\partial \mathbf{z}_m(t)}{\partial x_l})|$$
$$\leq 8\sqrt{2}\, C_2^{3/2}(C_1 + C_2^{3/2})C''\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.32}$$

Par les mêmes procédés, on obtient

$$|(\sum_{i,j,k,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m(t)))\nabla A_{ij}(\mathbf{u}(t)) \times \frac{\partial}{\partial x_l} A_{.,k}(\mathbf{u}(t)), \frac{\partial \mathbf{z}_m(t)}{\partial x_l})|$$
$$\leq 8\sqrt{2}\, C_2^{3/2}(C_1 + C_2^{3/2})C''\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.33}$$

Finalement, des majorations (4.27)-(4.30, (4.32) et (4.33), on déduit

$$|(\sum_{i,j,k=1}^{3}\nabla(\nabla\,(A_{ij}(\mathbf{u}(t))\frac{\partial}{\partial x_k}A_{ij}(\mathbf{l}(\mathbf{z}_m(t))))\times A_{.,k}(\mathbf{u}(t))),\nabla\,\mathbf{z}_m(t))|$$
$$\leq 16\sqrt{2}(C_1+C_2^{3/2})^2C''\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.34}$$

Passons au deuxième terme de (4.25), que nous développons:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}A_{ij}(\mathbf{u})\nabla\,(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_k)=\frac{\partial^2 A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k\partial x_l}A_{ij}(\mathbf{u})\nabla\,(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_k$$
$$+\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_l}\nabla\,(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_k+\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}A_{ij}(\mathbf{u})\nabla\,\frac{\partial}{\partial x_l}(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_k.$$

Majorons le premier terme issu de ce développement. Grâce à Hölder et Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$|\sum_{i,j,k,l=1}^{3}(\frac{\partial^2 A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k\partial x_l}A_{ij}(\mathbf{u})\nabla\,(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_k,\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l})|$$
$$\leq \|A(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}|\nabla\,A(\mathbf{u})|_{H^1(\Omega)}\|\nabla\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}.$$

Alors (I.2.15), le Lemme 4.1 et (4.4) impliquent

$$|\sum_{i,j,k,l=1}^{3}(\frac{\partial^2 A_{ij}(\mathbf{u}(t))}{\partial x_k\partial x_l}A_{ij}(\mathbf{u}(t))\nabla\,(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)))_k,\frac{\partial \mathbf{z}_m(t)}{\partial x_l})|$$
$$\leq 4\sqrt{2}\,C_1^2C''\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.35}$$

De même, avec en plus (I.2.16), nous obtenons

$$|\sum_{i,j,k,l=1}^{3}(\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_l}\nabla\,(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_k,\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l})|\leq C_2^{3/2}\|\nabla\,A(\mathbf{u})\|^2_{H^1(\Omega)}\|\nabla\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}.$$

Alors (I.2.15), le Lemme 4.1 et (4.4) impliquent

$$|\sum_{i,j,k,l=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}A_{ij}(\mathbf{u}(t))\frac{\partial}{\partial x_l}A_{ij}(\mathbf{u}(t))\nabla\,(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)))_k,\frac{\partial \mathbf{z}_m(t)}{\partial x_l})|$$
$$\leq 4\sqrt{2}\,C_1C_2^{3/2}C''\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.36}$$

Enfin, de nouveau grâce à Hölder, Cauchy-Schwarz et (I.2.16), nous obtenons

$$|\sum_{i,j,k,l=1}^{3}(\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}A_{ij}(\mathbf{u})\nabla\,\frac{\partial}{\partial x_l}(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m))_k,\frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l})|$$
$$\leq C_2^{3/2}\sum_{i,j=1}^{3}\|A_{ij}(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\partial^2\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)\|_{H^1(\Omega)}\|\nabla\,A_{ij}(\mathbf{u})\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}.$$

Alors Cauchy-Schwarz, le Lemme 4.1 et (4.4) impliquent

$$|\sum_{i,j,k,l=1}^{3}(\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u}(t))}{\partial x_k}A_{ij}(\mathbf{u}(t))\nabla\frac{\partial}{\partial x_l}(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)))_k,\frac{\partial \mathbf{z}_m(t)}{\partial x_l})|$$
$$\leq 4\sqrt{2}\,C_1C_2^{3/2}C''\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.37}$$

Rassemblant les majorations (4.35)-(4.37), on déduit

$$|\sum_{i,j,k=1}^{3}(\nabla(\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u}(t))}{\partial x_k}A_{ij}(\mathbf{u}(t))\nabla(\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)))_k),\nabla\,\mathbf{z}_m(t))|$$
$$\leq 4\sqrt{2}C_1(C_1+2C_2^{3/2})C''\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.38}$$

Finalement (4.25), (4.34) et (4.38) donnent

$$|(\nabla(\mathbf{L}(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{z}_m(t))),\nabla\,\mathbf{z}_m(t))|$$
$$\leq 8\sqrt{2}(C_1(C_1+2C_2^{3/2})+4(C_1+C_2^{3/2})^2)C''\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.39}$$

Considérons maintenant le membre de droite de (4.15). Il reste à majorer le terme spécifique de grade 3, c'est-à-dire

$$|(|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u},\mathbf{z}_m)_{H^1(\Omega)}|.$$

Décomposons ce terme. Tout d'abord, grâce à Hölder,

$$|(|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u},\mathbf{z}_m)|\leq\||A(\mathbf{u})|^2\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}.$$

De là, le Lemme I.3.3 et le Lemme 4.1 impliquent

$$|(|A(\mathbf{u}(t))|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t),\mathbf{z}_m(t))|\leq 4\sqrt{2}\,C_1^2\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)}|\mathbf{u}(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.40}$$

Enfin, nous avons

$$(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}),\nabla\,\mathbf{z}_m)=\sum_{l=1}^{3}[2\sum_{i,j=1}^{3}(A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_l}\mathbf{rot}\,\mathbf{u},\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_l})+(|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_l}),\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_l})].$$

Pour le premier terme, de Hölder et de Cauchy-Schwarz, on déduit

$$|\sum_{i,j,l=1}^{3}(A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_l}\mathbf{rot}\,\mathbf{u},\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_l})|\leq\|A(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\,A(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}.$$

De là, (I.2.15), le Lemme I.3.3 et le Lemme 4.1 donnent

$$|\sum_{i,j,l=1}^{3}(A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_l}\mathbf{rot}\,\mathbf{u},\frac{\partial\mathbf{z}_m}{\partial x_l})|\leq 4\sqrt{2}C_1^2\|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)}|\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)}|\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.41}$$

De même, pour le deuxième terme,

$$|\sum_{l=1}^{3}(|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l}), \frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l})| \leq \|A(\mathbf{u})\|^2_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)}|\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)},$$

puis

$$|\sum_{l=1}^{3}(|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l}), \frac{\partial \mathbf{z}_m}{\partial x_l})| \leq 4\sqrt{2}\,C_1^2\|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)}|\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)}|\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.42}$$

Alors, de (4.41) et (4.42) on déduit

$$|(\nabla(|A(\mathbf{u}(t))|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t), \nabla\,\mathbf{z}_m(t))| \leq 12\sqrt{2}\,C_1^2\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)}|\mathbf{u}(t)|_{H^2(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.43}$$

Rassemblant alors, d'une part les majorations (I.6.18)-(I.6.30), dans lesquelles on a remplacé C' et C'' par, respectivement, $\sqrt{2}C'$ et $\sqrt{2}C''$, et d'autre part les majorations (4.17), (4.22), (4.23), (4.24), (4.39), (4.40) et (4.43) et les substituant dans (4.15), nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\beta}{\alpha_1}(\||A(\mathbf{u}(t))|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\||A(\mathbf{u}(t))|\nabla\,\mathbf{z}_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) \leq \|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}(D_1 + D_3\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)})$$
$$+\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}(D_2 + D_4\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}) + \|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}(\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{H^1(\Omega)}$$
$$+\frac{\nu}{\alpha_1}\sqrt{2}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}(\frac{4\sqrt{2}}{\alpha_1}|\alpha_1+\alpha_2|C_1 + 12\sqrt{2}C_1^2\frac{\beta}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}),$$

avec

$$D_1 = (1 + 2|\alpha_1+\alpha_2|(\frac{1}{\alpha_1} + 2(1+\sqrt{2})C'))C_1 + 4\sqrt{2}|\alpha_1+\alpha_2|C'C_2^{3/2},$$

$$D_2 = 2C_1 + C_2^{3/2} + |\alpha_1+\alpha_2|[\frac{2C_1 + (2+\sqrt{2})C_2^{3/2}}{\alpha_1} + 4(1+2\sqrt{2})(C_1 + C_2^{3/2})C''],$$

$$D_3 = 8\beta\,C_1(2C_1 + (2+3\sqrt{2})C_2^{3/2})C'$$

et

$$D_4 = 8\beta(\frac{C_1C_2^{3/2}}{\alpha_1} + [3\sqrt{2}\,C_1(C_1 + 2C_2^{3/2}) + 4\sqrt{2}(C_1 + C_2^{3/2})^2]C'').$$

Utilisant la majoration

$$|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^(\Omega)} \leq \frac{1}{2}(|\mathbf{z}_m(t)|^2_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)})$$

et simplifiant par $\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}$, nous déduisons

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq (K_1 + K_2\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)})\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{H^1(\Omega)}$$
$$+\frac{\nu}{\alpha_1}\sqrt{2}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)} + \frac{4\sqrt{2}}{\alpha_1}C_1(|\alpha_1+\alpha_2| + 3\beta\,C_1\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)})\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)},$$

$$\text{avec } K_1 = \max(D_1, \frac{D_2}{2}) + \frac{D_2}{2} \text{ et } K_2 = \max(D_3, \frac{D_4}{2}) + \frac{D_4}{2}. \tag{4.44}$$

D'où (4.14) suit, avec

$$K_T = (K_1 + K_2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)}) \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)}$$

et

$$C_T = \|\mathbf{rot}\ \mathbf{f}\|_{L^1(0,T;H^1(\Omega)^3} + T\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)}[\frac{\sqrt{2}\nu}{\alpha_1}$$
$$+\frac{4\sqrt{2}}{\alpha_1} C_1(|\alpha_1+\alpha_2| + 3\beta\, C_1\, \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)})\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)}].$$

△

Il découle de (4.14) que la suite $\{\mathbf{z}_m\}$ est uniformément bornée par rapport à m dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$. De là, il existe une fonction $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et une sous-suite de $\{\mathbf{z}_m\}$, encore notée $\{\mathbf{z}_m\}$, telles que

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{z}_m = \mathbf{z} \quad \text{faible} * \text{ dans } L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3).$$

Comme dans le Paragraphe I.6.3, puisque le problème est linéaire, nous pouvons passer à la limite dans (4.12), (4.13) et montrer que $\mathbf{z}$ satisfait (4.10), (4.11). Nous avons donc prouvé le théorème suivant.

Théorème 4.3 *Supposons que Ω soit un ouvert de $I\!R^3$, borné et simplement connexe, avec une frontière $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{p} \Gamma_i$ (Γ_i connexe) de classe $C^{3,1}$. Si $\mathbf{u}$ est donné dans $L^\infty(0,T;V_2)$, $\mathbf{u}_0$ dans $H^4(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ tel que $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartienne à $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$, alors le problème (4.10), (4.11) a au moins une solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$.*

Remarque 4.4 *Comme pour les fluides de grade 2, voir Paragraphe I.7, les arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 4.3 peuvent être généralisés à un quelconque $m \geq 1$. Si Γ est de classe $C^{m+2,1}$, si $\mathbf{u}$ est donné dans $L^\infty(0,T;V_2 \bigcap H^{m+2}(\Omega)^3)$, $\mathbf{u}_0$ dans $H^{m+3}(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ tel que $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartienne à $L^1(0,T;H^m(\Omega)^3)$, alors le problème (4.10), (4.11) a au moins une solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^m(\Omega)^3)$.*

4.3 Unicité de la solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ de l'équation de transport

Soient $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_2$ deux solutions de (4.10), (4.11). Posons $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2$. Alors $\boldsymbol{\zeta}$ satisfait

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + \frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{u}.\nabla\boldsymbol{\zeta} - \frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{\zeta}.\nabla\mathbf{u} + (\alpha_1+\alpha_2)\{\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})$$
$$-\frac{1}{\alpha_1}(\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{u}) + 2\sum_{k=1}^{3}[\frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k}]\}$$
$$+\beta(\frac{1}{\alpha_1}|A(\mathbf{u})|^2\boldsymbol{\zeta} - 2\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\,\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta}) - \mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})) = 0, \tag{4.45}$$

$$\boldsymbol{\zeta}(0) = \mathbf{0}. \tag{4.46}$$

De façon analogue au Paragraphe I.6.4, le problème (4.45), (4.46) a la formulation variationnelle équivalente:

Chercher $\boldsymbol{\zeta}$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$, solution de

$$\forall \boldsymbol{\phi} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)^3) \text{ avec } \boldsymbol{\phi}' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^3) \text{ et } \boldsymbol{\phi}(T)=\mathbf{0},$$

$$\int_0^T [(\boldsymbol{\zeta}(t), \boldsymbol{\phi}'(t) - \frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\phi}(t) + \mathbf{u}(t).\nabla\boldsymbol{\phi}(t)) + (\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})(t), \boldsymbol{\phi}(t))]\, dt = 0, \tag{4.47}$$

où

$$\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta}) = \frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{\zeta}.\nabla\mathbf{u} - (\alpha_1+\alpha_2)\{\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}) - \frac{1}{\alpha_1}(\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{u})$$
$$+2\sum_{k=1}^{3}[\frac{\partial\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k} - \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial\mathbf{rot}\ \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x_k}]\}$$
$$-\beta(\frac{1}{\alpha_1}|A(\mathbf{u})|^2\boldsymbol{\zeta} - 2\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\,\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta}) - \mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})), \tag{4.48}$$

sans terme à $t=0$ et $t=T$, car $\boldsymbol{\zeta}(0)=\mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\phi}(T)=\mathbf{0}$.

Comme au Paragraphe I.6.4, pour tout $\boldsymbol{\mu}$ dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)^3)$, soit $\boldsymbol{\phi}$ l'unique solution dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)^3)$ avec $\boldsymbol{\phi}'$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ et $\boldsymbol{\phi}(T)=\mathbf{0}$ du problème

$$\boldsymbol{\phi}'(t) - \frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\phi}(t) + \mathbf{u}(t).\nabla\boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\mu}(t). \tag{4.49}$$

Nous posons de nouveau

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}). \tag{4.50}$$

Du Lemme I.6.9, on déduit

$$\forall\boldsymbol{\mu}\in L^2(0,T;H^1(\Omega)^3),\ \|\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \le 2T\|\boldsymbol{\mu}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}. \tag{4.51}$$

On démontre un lemme analogue au Lemme I.6.11

Lemme 4.5 *Soient $\boldsymbol{\zeta}$ élément de $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$, $\mathbf{u}$ donné dans $L^\infty(0,T;V_2)$ et $\mathbf{h}$ défini par (4.48). Alors $\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})$ appartient à $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ et*

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \le C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;V_2)}(D' + D''C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;V_2)})\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}, \tag{4.52}$$

où

$$D' = |\alpha_1+\alpha_2|[(\frac{2+\sqrt{2}}{\alpha_1} + 4(\sqrt{2}+1)C')C_1 + 4\sqrt{2}\,C'C_2^{\frac{3}{2}}] + C_1 \tag{4.53}$$

et

$$D'' = 4\beta\,C_1(\frac{C_1}{\alpha_1} + 2(2C_1 + (2+3\sqrt{2})C_2^{3/2})C'). \tag{4.54}$$

Démonstration. Le calcul de D' correspond au calcul de D dans le Lemme I.6.11, avec C' remplacée par $\sqrt{2}\,C'$. Ensuite, du Lemme 4.1, on déduit

$$\||A(\mathbf{u})|^2\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq 4\,C_1^2(C(\alpha_1))^2\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,T;V_2)}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}. \tag{4.55}$$

Pour les deux termes restants de $\mathbf{h}$, on utilise les mêmes procédés que pour établir les majorations (4.17) et (4.22). Ainsi,

$$\|\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\,\mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq 8\sqrt{2}\,C_1C_2^{3/2}C'(C(\alpha_1))^2\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,T;V_2)}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \tag{4.56}$$

et

$$\|\mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq 8\,C_1(2C_1+(2+\sqrt{2})C_2^{3/2})C'(C(\alpha_1))^2\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,T;V_2)}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}. \tag{4.57}$$

Le calcul de D'' résulte de (4.55), (4.56) et (4.57).
$\triangle$

Le lemme suivant prouve l'unicité dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ de la solution du problème (4.10), (4.11).

Lemme 4.6 *Soient* Γ *de classe* $C^{2,1}$ *et* $\mathbf{u}$ *donné dans* $L^\infty(0,T;V_2)$*. Alors l'unique solution* $\boldsymbol{\zeta}$ *de (4.45), (4.46) dans* $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ *est* $\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0}$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du Lemme I.6.12. Par densité, il existe une suite $\{\boldsymbol{\mu}_n\}$ avec $\boldsymbol{\mu}_n \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)^3$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{\mu}_n-\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}=0. \tag{4.58}$$

Nous posons

$$\boldsymbol{\phi}_n=\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_n), \tag{4.59}$$

où $\mathbf{F}$ est défini par (4.50). En prenant $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}_n$ dans (4.47), nous obtenons

$$\int_0^T[(\boldsymbol{\zeta}(t),\boldsymbol{\phi}_n'(t)-\frac{\nu}{\alpha_1}\boldsymbol{\phi}_n(t)+\mathbf{u}(t).\nabla\boldsymbol{\phi}_n(t))+(\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})(t),\boldsymbol{\phi}_n(t))]\,dt=0.$$

Avec (4.49) et (4.59), cela devient

$$\int_0^T[(\boldsymbol{\zeta}(t),\boldsymbol{\mu}_n(t))+(\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})(t),\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_n)(t))]\,dt=0. \tag{4.60}$$

Etant donné (4.58) et (4.51), $\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_n)$ est borné dans l'espace $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$. D'où, il existe une fonction $\boldsymbol{\psi}$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ et une sous-suite de $\{\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_n)\}$, encore notée $\{\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_n)\}$, telles que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_n)=\boldsymbol{\psi} \qquad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)^3).$$

Comme dans le Paragraphe I.6.4, on obtient

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq 2\,T\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}, \tag{4.61}$$

puis le passage à la limite dans (4.60) donne

$$\int_0^T [\|\boldsymbol{\zeta}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\mathbf{h}(\mathbf{u},\boldsymbol{\zeta})(t), \boldsymbol{\psi}(t))]\, dt = 0.$$

Alors de (4.61) et du Lemme 4.5, nous déduisons que

$$\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}(1 - 2\,T\,C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;V_2)}(D' + D''\,C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;V_2)})) \leq 0. \tag{4.62}$$

Nous posons

$$T^* = \frac{1}{4\,C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;V_2)}(D' + D''\,C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;V_2)})},$$

où D' et D'' dépendent de α_1, α_2, C_1, C_2 et C', mais non de T (cf. (4.53) et (4.54)). Si $T^* \geq T$, (4.62) donne

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{0} \ \text{ pour tout } t \text{ dans } [0,T].$$

Si $T^* < T$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(p-1)T^* < T \leq pT^*$. On remplace successivement $[0,T]$ par $[(k-1)T^*, kT^*]$ pour $k = 1, \ldots,\ p-1$ dans (4.47) et on utilise (4.49), (4.50) , (4.51) et le Lemme 4.5; nous obtenons successivement pour $k = 1, \ldots,\ p-1$ des relations analogues à (4.62):

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\zeta}\|^2_{L^2((k-1)T^*,kT^*;L^2(\Omega)^3)}&[1 - 2\,T^*\,C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty((k-1)T^*,kT^*;V_2)}\\ &(D' + D''C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty((k-1)T^*,kT^*;V_2)})] \leq 0.\end{aligned}$$

Comme $\|\mathbf{u}\|_{L^\infty((k-1)T^*,kT^*;V_2)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;V_2)}$, nous avons

$$[1 - 2\,T^*\,C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty((k-1)T^*,kT^*;V_2)}(D' + D''C(\alpha_1)\|\mathbf{u}\|_{L^\infty((k-1)T^*,kT^*;V_2)})] \geq \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{0} \ \text{ pour tout } t \text{ dans } [(k-1)T^*, kT^*], \text{ pour } k = 1, \ldots, p-1, \text{ soit}$$

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{0} \ \text{ pour tout } t \text{ dans } [0, (p-1)T^*].$$

Finalement, le même argument sur l'intervalle restant $[(p-1)T^*, T]$ donne

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{0} \ \text{ pour tout } t \text{ dans } [0,T].$$

$\triangle$

4.4 Conclusion

Le problème (4.10), (4.11) a une solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ (cf. Paragraphe 4.2) et une solution $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ (cf. Paragraphe 4.1). Dans le Paragraphe 4.3, nous prouvons que ce problème n'a qu'une solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$. Donc $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ appartient à $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et, étant donné la Remarque I.2.3, cela implique que $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$. Nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème 4.7 *Supposons que Ω soit un ouvert de $I\!R^3$, borné et simplement connexe, avec une frontière $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{p} \Gamma_i$ (Γ_i connexe). Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (1.6)-(1.10) appartienne à $L^\infty(0,T;V_2)$. Si Γ est de classe $C^{3,1}$ et si les données ont la régularité:*

$$\mathbf{u}_0 \in H^4(\Omega)^3 \cap V \ , \ \mathbf{f} \in L^1(0,T;H^1(\Omega)^3) \ , \ \mathbf{rot}\, \mathbf{f} \in L^1(0,T;H^1(\Omega)^3) \ , \tag{4.63}$$

alors $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$.

Suivant la Remarque 4.4, l'énoncé du Théorème 4.7 peut être généralisé par induction à tout $m \geq 1$ pour donner le résultat suivant. Soit Γ de classe $C^{m+2,1}$. Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (1.6)-(1.10) appartienne à $L^\infty(0,T;V_2)$. Si $\mathbf{u}_0$ est donné dans $H^{m+3}(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ dans $L^1(0,T;H^m(\Omega)^3)$ avec $\mathbf{rot}\ \mathbf{f}$ dans $L^1(0,T;H^m(\Omega)^3)$, alors $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T;H^{m+3}(\Omega)^3)$. La démonstration est analogue à celle faite au Paragraphe I.7 pour les fluides de grade 2. Ainsi, on prend encore pour base les fonctions propres du problème

$$\forall \mathbf{v} \in H^m(\Omega)^3 \ , \ ((\mathbf{w}_j, \mathbf{v}))_m = \lambda_j (\mathbf{w}_j, \mathbf{v}) \ ,$$

où $((.,.))_m$ représente le produit scalaire de $H^m(\Omega)^3$.

Chapitre VI
Fluide de grade trois avec Ω non simplement connexe

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons utiliser des définitions et résultats des Chapitres II et IV. On suppose que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière Γ est de classe $C^{2,1}$.

Rappelons (cf. Paragraphe II.1) le résultat suivant:

$$\forall \mathbf{v} \in H^2(\Omega)^3 \cap V,\ \|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1(\alpha_1)\|P(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.1}$$

où P est l'opérateur de projection de Helmholtz.

Rappelons (cf. Paragraphe II.1 et II.2) la définition suivante:

$$V_2 = \{\mathbf{v} \in V \cap H^2(\Omega)^3; \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \alpha_1 \Delta \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)^3\} \tag{1.2}$$

et le résultat suivant: l'espace V_2 est inclus dans $H^3(\Omega)^3$ et il existe une constante $C(\alpha_1)$ telle que

$$\forall \mathbf{v} \in V_2,\ \|\mathbf{v}\|_{H^3(\Omega)} \leq C_2(\alpha_1)\|\mathbf{v}\|_{V_2}, \tag{1.3}$$

où la norme dans V_2 est définie par (II.2.2).

On considère de nouveau le problème (V.1.6)-(V.1.10). Le système d'équations à résoudre est donc celui du chapitre précédent et l'étude sera conduite selon le même plan.

2 Estimations *a priori* et unicité

On définit le produit scalaire dans V, ainsi que la norme, comme aux Paragraphes I.3 et I.5. La formulation variationnelle équivalente du problème est celle du Paragraphe V.2, c'est-à-dire:

Pour $\mathbf{f}$ donné dans $L^2(0,T;H(\mathbf{rot};\Omega)) \bigcap L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)$ et $\mathbf{u}_0$ donné dans V_2, chercher $\mathbf{u}$ dans $L^\infty(0,T;V_2)$ avec $\mathbf{u}'$ dans $L^2(0,T;V)$, tel que

$$\forall \mathbf{v} \in V \qquad (\mathbf{u}', \mathbf{v})_V + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta \mathbf{u}) \times \mathbf{u}, \mathbf{v})$$
$$+(\alpha_1 + \alpha_2)[(\nabla(\mathbf{u}.\nabla \mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}) + 2b(\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v})] + \frac{\beta}{2}(|A(\mathbf{u})|^2 A(\mathbf{u}), A(\mathbf{v})) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \qquad (2.1)$$
avec la condition initiale (V.1.9).

Nous démontrons un lemme analogue au Lemme V.2.2.

Lemme 2.1 *Supposons que le problème (2.1), (V.1.9) ait une solution* $\mathbf{u}$ *dans* $C^0(0, T; V_2)$ *avec* $\mathbf{u}'$ *dans* $L^\infty(0, T; V)$. *Posons*
$$K_1 = \frac{\nu}{2(\mathcal{P}^2 + \alpha_1)}, \ K_2 = \frac{6}{\alpha_1}|\alpha_1 + \alpha_2| C_1 C_2(\alpha_1).$$
Alors cette solution satisfait les inégalités suivantes pour tout t *dans* $[0, T]$:
$$\|\mathbf{u}(t)\|_V^2 \le e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\, ds$$
$$-K_2 \int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}(s)\|_{V_2})\|\mathbf{u}(s)\|_V^2\, ds, \qquad (2.2)$$
$$\int_0^t \|\, |A(\mathbf{u}(s))|\, \|_{L^4(\Omega)}^4\, ds \le \frac{1}{\beta}(\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\, ds)$$
$$-\frac{K_2}{\beta}\int_0^t (\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}(s)\|_{V_2})\|\mathbf{u}(s)\|_V^2\, ds). \qquad (2.3)$$

Démonstration. Les arguments sont les mêmes que pour le Lemme V.2.2, il suffit de substituer $C_2(\alpha_1)$ à $C(\alpha_1)$.
$\triangle$

Pour majorer $\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}$, nous utiliserons, en plus de l' équation de transport (V.2.16), l'équation suivante, qui est déduite en projetant l'équation (V.1.6) à l'aide de l'opérateur P de projection de Helmholtz (pour simplifier les notations, la variable t a été omise):
$$\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}) + \frac{\nu}{\alpha_1}P(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u}) + P(\mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta \mathbf{u}) \times \mathbf{u})$$
$$+(\alpha_1 + \alpha_2)P(-\Delta(\mathbf{u}.\nabla \mathbf{u}) + 2\mathbf{u}.\nabla(\Delta \mathbf{u})) - \beta\, P(\mathrm{div}(|A(\mathbf{u})|^2 A(\mathbf{u}))) = P(\mathbf{f}) + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u}. \quad (2.4)$$
Comme nous l'avons vu dans la démonstration du Théorème II.2.2, cette équation est une égalité dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$.

Théorème 2.2 *Supposons, en plus des hypothèses du Lemme 2.1, que* $\mathbf{u}$ *appartienne à* $L^2(0, T; H^4(\Omega)^3)$. *Alors* $y(t) = \|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2$ *satisfait l'inégalité différentielle dans* $[0, T]$:

$$y'(t) \le K_3(e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\, ds)$$
$$+\frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)}^2 - C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)} - y(t))y(t)$$
$$+\frac{\beta C_2(\alpha_1)}{2\alpha_1^2}\|\, |A(\mathbf{u}(t))|\, \|_{L^4(\Omega)}^4 - K_3 K_2 \int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - \sqrt{y(s)}\,)\|\mathbf{u}(s)\|_V^2\, ds, \qquad (2.5)$$

où

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \min(2\, D_3, D_4) + \frac{\alpha_1}{2\,\nu}(\min(2\, D_1, D_2))^2 \tag{2.6}$$

avec

$$D_1 = 2(1 + (\sqrt{6} + 2(1 + 2\sqrt{3}))|\alpha_1 + \alpha_2|C_2(\alpha_1))C_1C_1(\alpha_1),$$

$$D_2 = 2C_1C_2(\alpha_1) + 2|\alpha_1 + \alpha_2|(C_2(\alpha_1))^2[(\sqrt{6} + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2}))C_1 + (\sqrt{6} + 2\sqrt{2})C_2^{3/2}],$$

$$D_3 = \beta(8(4 + \sqrt{3})C_1^2C_2(\alpha_1) + \frac{C_2^3}{2}C_1(\alpha_1))C_1(\alpha_1)C_2(\alpha_1)$$

et

$$D_4 = 16\beta C_1((3\sqrt{2} + 2)C_2^{3/2} + 2C_1)(C_2(\alpha_1))^3,$$

où

$$K_3 = \frac{2\nu}{\alpha_1}\max(1, \frac{2}{\alpha_1}) \tag{2.7}$$

et K_1, K_2 sont définies dans le Lemme 2.1.

Démonstration. Pour simplifier, posons $\mathbf{z} = \boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}$. Prendre le produit scalaire de (V.2.16) avec $\mathbf{z}$ donne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{z}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{z}\|^2_{L^2(\Omega)} - b(\mathbf{z};\mathbf{u},\mathbf{z}) + (\alpha_1 + \alpha_2)\{-b(\Delta\mathbf{u};\boldsymbol{\omega},\mathbf{z}) \\
&\quad + b(\boldsymbol{\omega};\Delta\mathbf{u},\mathbf{z}) + 2\sum_{k=1}^{3}[b(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k};\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k},\mathbf{z}) - b(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k};\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k},\mathbf{z}) \\
&\quad + (\nabla u_k \times \nabla\Delta u_k, \mathbf{z})]\} - \beta\{2(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\boldsymbol{\omega},\mathbf{z}) + (\mathbf{B}(\mathbf{u}),\mathbf{z})\} \\
&\quad + \frac{\beta}{\alpha_1}\||A(\mathbf{u})|\mathbf{z}\|^2_{L^2(\Omega)} = (\mathbf{rot}(\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u}),\mathbf{z}) + \frac{\beta}{\alpha_1}(|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u},\mathbf{z}).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

De même, posons $\mathbf{w} = P(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$. Multipliant scalairement (2.4) par $\mathbf{w}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + (P(\mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u}),\mathbf{w}) \\
&\quad + 2(\alpha_1 + \alpha_2)(P(\mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u})),\mathbf{w}) - (\alpha_1 + \alpha_2)(P(\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u})),\mathbf{w}) \\
&\quad - \beta(P(\mathrm{div}(|A(\mathbf{u})|^2A(\mathbf{u}))),\mathbf{w}) = (P(\mathbf{f}) + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u},\mathbf{w}).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Puis l'addition des équations (2.8) et (2.9) donne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2_{V_2} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}\|^2_{V_2} + (P(\mathbf{rot}(\mathbf{u} - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u}),\mathbf{w}) \\
&\quad - b(\mathbf{z};\mathbf{u},\mathbf{z}) + (\alpha_1 + \alpha_2)\{-b(\Delta\mathbf{u};\boldsymbol{\omega},\mathbf{z}) + b(\boldsymbol{\omega};\Delta\mathbf{u},\mathbf{z}) \\
&\quad + 2\sum_{k=1}^{3}[b(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k};\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k},\mathbf{z}) - b(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k};\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial x_k},\mathbf{z}) + (\nabla u_k \times \nabla\Delta(u_k),\mathbf{z})] \\
&\quad + 2(P(\mathbf{u}.\nabla(\Delta\mathbf{u})),\mathbf{w}) - (P(\Delta(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u})),\mathbf{w})\} - \beta(P(\mathrm{div}(|A(\mathbf{u})|^2A(\mathbf{u}))),\mathbf{w})
\end{aligned}$$

$$-\beta\{2(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\boldsymbol{\omega},\mathbf{z})+(\mathbf{B}(\mathbf{u}),\mathbf{z})\}+\frac{\beta}{\alpha_1}\||A(\mathbf{u})|\mathbf{z}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$=(P(\mathbf{f})+\frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u},\mathbf{w})+(\mathbf{rot}(\mathbf{f}+\frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u})+\frac{\beta}{\alpha_1}|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u},\mathbf{z}). \tag{2.10}$$

Beaucoup de termes de cette égalité ont déja été majorés en valeur absolue dans le Paragraphe II.2. Il reste à majorer des termes de grade 3. Par des procédés analogues à ceux utilisés pour démontrer les inégalités (V.2.21)-(V.2.23), $C_2(\alpha_1)$ remplaçant $C(\alpha_1)$, on obtient

$$|(\nabla(|A(\mathbf{u}(t))|^2.\nabla\boldsymbol{\omega}(t),\mathbf{z}(t))|\leq 8\sqrt{2}C_1C_2^{3/2}(C_2(\alpha_1))^3\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|^3_{V_2}, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}&|(\sum_{k=1}^3\nabla(\frac{\partial}{\partial x_k}|A(\mathbf{u}(t))|^2)\times A_{.,k}(\mathbf{u}(t)),\mathbf{z}(t))|\\ &\leq 16C_1(C_1+C_2^{3/2})(C_2(\alpha_1))^3\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|^3_{V_2},\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}&|(\sum_{k=1}^3(\frac{\partial}{\partial x_k}|A(\mathbf{u}(t))|^2)\nabla\omega_k(t),\mathbf{z}(t))|\\ &\leq 8\sqrt{2}C_1C_2^{3/2}(C_2(\alpha_1))^3\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|^3_{V_2}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Enfin, dans le premier membre, il reste à majorer

$$|(P(\operatorname{div}(|A(\mathbf{u})|^2A(\mathbf{u}))),\mathbf{w})|.$$

De (V.2.13), on déduit

$$\begin{aligned}\|P(\operatorname{div}(|A(\mathbf{u})|^2A(\mathbf{u}))\|_{L^2(\Omega)}&\leq\||A(\mathbf{u})|^2\Delta\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}\\ &+\|\sum_{k=1}^3\frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{u})|^2)A_{.,k}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

D'une part, grâce au Lemme I.3.3, on obtient

$$\||A(\mathbf{u})|^2\Delta\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}\leq\sqrt{3}\||A(\mathbf{u})|^2\|_{L^\infty(\Omega)}|\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)}.$$

Alors le Lemme V.4.1, (1.1) et (1.3) impliquent

$$\||A(\mathbf{u})|^2\Delta\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}\leq 4\sqrt{3}C_1^2C_1(\alpha_1)(C_2(\alpha_1))^2\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}\|^2_{V_2}. \tag{2.15}$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$\begin{aligned}\|\sum_{k=1}^3\frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{u})|^2)A_{.,k}(\mathbf{u})\|^2_{L^2(\Omega)}&=4\sum_{l=1}^3\int_\Omega(\sum_{k,i,j=1}^3A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}A_{lk}(\mathbf{u}))^2\,d\mathbf{x}\\ &\leq 4\||A(\mathbf{u})|^2\|^2_{L^\infty(\Omega)}|A(\mathbf{u})|^2_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Alors l'inégalité $|A(\mathbf{u})|_{H^1(\Omega)} \leq 2|\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)}$, le Lemme V.4.1 et les majorations (1.1), (1.3) impliquent

$$\|\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(|A(\mathbf{u})|^2)A_{.,k}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \leq 16C_1^2 C_1(\alpha_1)(C_2(\alpha_1))^2\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}\|_{V_2}^2. \tag{2.16}$$

Finalement (2.14), (2.15) et (2.16) donnent

$$\begin{aligned}&|(P(\mathrm{div}(|A(\mathbf{u}(t))|^2A(\mathbf{u}(t)))), \mathbf{w}(t))| \\ &\leq 4(4+\sqrt{3})C_1^2C_1(\alpha_1)(C_2(\alpha_1))^2\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Pour le second membre de (2.10), rappelons les majorations (voir la démonstration du Théorème V.2.4)

$$|(\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t), \mathbf{z}(t))| \leq \frac{\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{4\alpha_1}\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$|(\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t))| \leq \|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4}\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$|(|A(\mathbf{u}(t))|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t))| \leq \frac{1}{4}\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\,\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\,|A(\mathbf{u}(t))|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ensuite, nous utilisons les deux majorations suivantes:

$$|(P(\mathbf{f}(t)), \mathbf{w}(t))| \leq \frac{\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{4\alpha_1}\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et

$$|(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t))| \leq \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4}\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Enfin, remplaçant $C(\alpha_1)$ par $C_2(\alpha_1)$, remarquant que $\|\nabla\,\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^4 \leq \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}^2\|\mathbf{u}\|_{H^3(\Omega)}^2$ et utilisant (1.1) et (1.3), on a une majoration analogue à (V.2.26):

$$\begin{aligned}\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq{}& \frac{C_2(\alpha_1)}{\alpha_1}\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\,\|_{L^4(\Omega)}^4 \\ &+\alpha_1C_2^3(C_1(\alpha_1))^2C_2(\alpha_1)\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2.\end{aligned}$$

Utilisant ces majorations pour le second membre, les majorations (II.2.12)-(II.2.20) pour les termes de grade 2 et les majorations (2.11)-(2.13) et (2.17) pour les termes spécifiques de grade 3, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2 + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2 \leq \frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)}^2 + \frac{2\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)}^2 \\ &+D_1\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2} + D_2\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2 + D_3\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^2 \\ &+D_4\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2}^3 + \frac{\beta C_2(\alpha_1)}{2\alpha_1^2}\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\,\|_{L^4(\Omega)}^4,\end{aligned} \tag{2.18}$$

où D_1, D_2, D_3 et D_4 sont définies dans le Théorème 2.2. Posons

$$x = \|\mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega)} \text{ et } y = \|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant les majorations (II.2.22) et (II.2.23), on obtient

$$D_1\|\mathbf{w}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + D_2\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2} \leq \min(2\,D_1, D_2)\|\mathbf{u}(t)\|^2_{V_2}$$

et

$$D_3\|\mathbf{w}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + D_4\|\mathbf{z}(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{V_2} \leq \min(2\,D_3, D_4)\|\mathbf{u}(t)\|^2_{V_2}.$$

Substituant ces majorations dans (2.18), remarquant que

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)} \leq \max(1, \sqrt{2/\alpha_1}\,)\|\mathbf{u}(t)\|_V,$$

et posant

$$y(t) = \|\mathbf{u}(t)\|^2_{V_2},$$

on a, avec la constante K_3 définie par (2.7),

$$y'(t) + \frac{\nu}{\alpha_1}y(t) \leq \frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{f}(t)\|^2_{H(\mathbf{rot};\Omega)} + K_3\|\mathbf{u}(t)\|^2_V$$
$$\min(2\,D_1, D_2)y(t)\sqrt{y(t)} + \min(2\,D_3, D_4)(y(t))^2 + \frac{\beta C_2(\alpha_1)}{2\alpha_1^2}\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\,\|^4_{L^4(\Omega)}.$$

Comme dans le Paragraphe V.2, de l'inégalité $\sqrt{y} \leq \dfrac{1}{4\theta}y + \theta$, appliquée avec

$$\theta = \frac{\nu}{2\alpha_1 \min(2\,D_1, D_2)} \text{ et } y(t),$$

on déduit, utilisant la notation (2.6) qui définit $C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$,

$$y'(t) \leq \frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{f}(t)\|^2_{H(\mathbf{rot};\Omega)} + K_3\|\mathbf{u}(t)\|^2_V$$
$$+\frac{\beta C_2(\alpha_1)}{2\alpha_1^2}\|\,|A(\mathbf{u}(t))|\,\|^4_{L^4(\Omega)} - C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)(\frac{\nu}{2\,\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)} - y(t))y(t)$$

et (2.5) suit en substituant (2.2) dans cette inégalité.
△

Comme dans le cas Ω simplement connexe, nous ne pourrons prouver l'existence globale en temps que si nous montrons que $\mathbf{u}(t)$ est uniformément borné en temps dans V_2.

Lemme 2.3 *Soit* $\mathbf{f}$ *appartenant à* $L^2(I\!R^+; H(\mathbf{rot};\Omega))$. *Si les données satisfont*

$$\|\mathbf{u}_0\|^2_{V_2} + \frac{2\alpha_1^2 K_3 + C_2(\alpha_1)K_1}{2\alpha_1^2 K_1}(\|\mathbf{u}_0\|^2_V + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt) + \frac{2\alpha_1}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^2_{H(\mathbf{rot};\Omega)}\,dt$$
$$< \min\left(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}, \frac{K_1^2}{K_2^2}\right), \tag{2.19}$$

où $C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ *est définie par (2.6),* K_3 *par (2.7) et* K_1 *et* K_2 *sont définies dans le Lemme 2.1, alors toute solution continue de (2.5), avec la valeur de départ* $y(0) = \|\mathbf{u}_0\|^2_{V_2}$*, satisfait*

$$\forall t \geq 0,\ 0 \leq y(t) \leq \min\left(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1, \alpha_2, \beta)}, \frac{K_1^2}{K_2^2}\right). \tag{2.20}$$

Démonstration. La démonstration est presque identique à celle du Lemme V.2.5, K_3 et $C_2(\alpha_1)$ remplaçant $\dfrac{4\nu}{\alpha_1^2}$ et $C(\alpha_1)$. On intégre (2.5) de 0 à t en utilisant le Lemme I.3.7 et on substitue la majoration (2.3). Cela donne

$$y(t) \le y(0) + \frac{2\alpha_1^2 K_3 + C_2(\alpha_1)K_1}{2\alpha_1^2 K_1}(\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds)$$
$$+\frac{2\alpha_1}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|^2_{H(\mathbf{rot};\Omega)}\,ds - C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)\int_0^t \left(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)} - y(s)\right) y(s)\,ds$$
$$-K_2\int_o^t \left(\frac{K_1}{K_2} - \sqrt{y(s)}\right)\|\mathbf{u}(s)\|_V^2[\frac{C_2(\alpha_1)}{2\alpha_1^2} + \frac{K_3}{K_1}(1-e^{-K_1(t-s)})]\,ds.$$

On définit M par (V.2.29) et $a(s,t)$ par

$$a(s,t) = C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)y(s) + \frac{K_2^2}{(K_1 + K_2\sqrt{y(s)})}\|\mathbf{u}(s)\|_V^2[\frac{C_2(\alpha_1)}{2\alpha_1^2} + \frac{K_3}{K_1}(1-e^{-K_1(t-s)})]. \quad (2.21)$$

Le reste de la démonstration s'effectue de la même manière que celle du Lemme V.2.5. $\triangle$

Nous concluons ce paragraphe en prouvant l'unicité de la solution globale du problème (2.1), (V.1.9), si elle existe. La démonstration est pratiquement identique à celle du cas Ω simplement connexe, Paragraphe V.2. Tout d'abord, on démontre le Lemme V.2.7 de manière identique et si $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont deux solutions de (2.1), leur différence $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ vérifie l'équation (V.2.34). Ensuite la démonstration du Théorème V.2.8 est quasiment identique à celle du cas Ω simplement connexe, il suffit, substituant $C_2(\alpha_1)$ à $C(\alpha_1)$, de remplacer les constantes $c_1(T)$, $c_2(T)$ et $c_3(T)$ du Paragraphe V.2 par les constantes $c_1(T)$, $c_2(T)$ et $c_3(T)$ du Paragraphe II.2. Puis la monotonie de $\mathbf{K}$ nous ramène à l'inéquation

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_V^2 \le 2\frac{c_1(T) + c_2(T) + c_3(T)}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_V^2.$$

Alors l'inégalité de Gronwall et le fait que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ impliquent que $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, pour tout t dans $[0,T]$.

3 Existence de solution

Dans ce paragraphe, nous supposons que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$ et que $\mathbf{f}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^+; H(\mathbf{rot};\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$.

La solution du problème (2.1), (V.1.9) est construite au moyen d'une discrétisation de Galerkin. On utilise la suite de fonctions propres $\{\mathbf{w}_j\}$ de V_2, définie dans le Paragraphe II.3 par (II.3.2). Le problème approché du problème (2.1), (V.1.9) s'écrit sous la même forme que dans le cas Ω simplement connexe, soit:

Chercher

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{j,m}(t)\mathbf{w}_j,$$

solution, pour $1 \le j \le m$, de

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j)_V + \nu(\nabla \mathbf{u}_m(t), \nabla \mathbf{w}_j) + (\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m(t) - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Delta \mathbf{u}_m(t)) \times \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) \\
&+(\alpha_1 + \alpha_2)\{b(\mathbf{u}_m(t); \Delta \mathbf{w}_j, \mathbf{u}_m(t)) + 2\, b(\mathbf{u}_m(t); \Delta \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)\} \\
&\quad + \frac{\beta}{2}(|A(\mathbf{u}_m(t))|^2 A(\mathbf{u}_m(t)), A(\mathbf{w}_j)) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j), \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_m(0) = P_m(\mathbf{u}_0). \qquad (3.2)$$

De même qu'au Paragraphe V.3, ce système a une solution $\mathbf{u}_m$, unique et continue sur $[0, T_m^*]$ avec $\mathbf{u}'_m$ dans $L^\infty(0, T_m^*)$, pour un nombre $T_m^* > 0$. Nous nous proposons de démontrer que $\mathbf{u}_m(t)$ satisfait l'estimation *a priori* du paragraphe précédent.

En multipliant les deux membres de (3.1) par $c_{j,m}(t)$ et en sommant par rapport à j, nous obtenons sur $[0, T_m^*]$ l'égalité:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m(t)\|_V^2 + \nu|\mathbf{u}_m(t)|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2}\|\,|A(\mathbf{u}_m(t)|\,\|_{L^4(\Omega)}^4 \\
&+3(\alpha_1 + \alpha_2)b(\mathbf{u}_m(t); \Delta \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t)). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Alors la démonstration du Lemme 2.1 s'applique à $\mathbf{u}_m$ sans modification et fournit le résultat suivant.

Lemme 3.1 *La solution $\mathbf{u}_m$ du problème (3.1), (3.2) satisfait les inégalités suivantes pour tout t dans $[0, T_m^*]$:*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_m(t)\|_V^2 \le e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_m(0)\|_V^2 &+ \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\, ds \\
&-K_2\int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}_m(s)\|_{V_2})\|\mathbf{u}_m(s)\|_V^2\, ds, \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|\,|A(\mathbf{u}_m(s))|\,\|_{L^4(\Omega)}^4\, ds \le \frac{1}{\beta}(\|\mathbf{u}_m(0)\|_V^2 &+ \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\, ds) \\
&-\frac{K_2}{\beta}\int_0^t (\frac{K_1}{K_2} - \|\mathbf{u}_m(s)\|_{V_2})\|\mathbf{u}_m(s)\|_V^2\, ds), \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

où K_1 et K_2 sont définies dans le Lemme 2.1.

On définit la fonction $\mathbf{F}$ par (V.3.7), c'est-à-dire comme au Paragraphe V.3. Pour tout t, la solution de Stokes $\mathbf{v}_m(t)$ dans V est encore définie par (V.3.8). Comme au Paragraphe V.3, on montre que $\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t))$ appartient à $H^1(\Omega)^3$, puis, comme au Paragraphe II.3, il s'ensuit que $\mathbf{v}_m(t)$ appartient à V_2. Grâce à la base spéciale et à (V.3.8), on déduit, pour tout $1 \leq j \leq m$, l'équation discrétisée

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j)_{V_2} + (\mathbf{v}_m(t), \mathbf{w}_j)_{V_2} = 0. \tag{3.6}$$

Le théorème suivant est l'analogue du Théorème 2.2.

Théorème 3.2 *Soit Ω un domaine borné de $I\!R^3$, de frontière Γ de classe $C^{3,1}$. On suppose que $\mathbf{f}$ est dans $L^2(I\!R^+; H(\mathbf{rot};\Omega)) \bigcap L^\infty(I\!R^+; L^2(\Omega)^3)$. Alors $y(t) = \|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{V_2}$ satisfait l'inégalité différentielle dans $[0, T^*_m]$:*

$$\begin{aligned} y'(t) \leq\ & K_3(e^{-K_1 t}\|\mathbf{u}_m(0)\|^2_V + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^t e^{-K_1(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds) \\ & +\frac{2\alpha_1}{\nu}\|\mathbf{f}(t)\|^2_{H(\mathbf{rot};\Omega)} - C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)} - y(t))y(t) \\ & +\frac{\beta C_2(\alpha_1)}{2\alpha_1^2}\|\,|A(\mathbf{u}_m(t))|\,\|^4_{L^4(\Omega)} - K_3K_2\int_0^t e^{-K_1(t-s)}(\frac{K_1}{K_2} - \sqrt{y(s)}\,)\|\mathbf{u}_m(s)\|^2_V\,ds, \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ est définie par (2.6), K_3 par (2.7) et K_1, K_2 sont définies dans le Lemme 2.1.

Démonstration. En multipliant les deux membres de (3.6) par $c_{j,m}(t)$ et en sommant sur j, nous obtenons

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t))_{V_2} + (\mathbf{v}_m(t), \mathbf{u}_m(t))_{V_2} = 0.$$

Poser $\boldsymbol{\omega}_m(t) = \mathbf{rot}\ \mathbf{u}_m(t)$, $\mathbf{z}_m(t) = \boldsymbol{\omega}_m(t) - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}_m(t)$, $\mathbf{w}_m(t) = P(\mathbf{u}_m(t) - \alpha_1\Delta\,\mathbf{u}_m(t))$ et utiliser le fait que

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v}_m(t) - \alpha_1\Delta\mathbf{v}_m(t)) = \mathbf{rot}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t))$$

et

$$P(\mathbf{v}_m(t) - \alpha_1\Delta\mathbf{v}_m(t)) = P(\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)) - \mathbf{f}(t)),$$

donnent

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{V_2} + (\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t)), \mathbf{z}_m(t)) + (P(\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t))), \mathbf{w}_m(t)) \\ = (\mathbf{rot}\ \mathbf{f}(t), \mathbf{z}_m(t)) + (P(\mathbf{f}(t)), \mathbf{w}_m(t)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

En développant $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{u}_m(t))$ avec (I.5.11) et le Lemme V.2.3, en utilisant la linéarité de P et en supprimant la variable t, pour simplifier les notations, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m\|^2_{V_2} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}_m\|^2_{V_2} + (P(\mathbf{rot}(\mathbf{u}_m - (2\alpha_1+\alpha_2)\Delta\mathbf{u}_m)\times\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_m) \\ & -b(\mathbf{z}_m; \mathbf{u}_m, \mathbf{z}_m) + (\alpha_1+\alpha_2)\{-b(\Delta\mathbf{u}_m; \boldsymbol{\omega}_m, \mathbf{z}_m) + b(\boldsymbol{\omega}_m; \Delta\mathbf{u}_m, \mathbf{z}_m) \\ & +2\sum_{k=1}^3[b(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_m}{\partial x_k}; \frac{\partial\mathbf{u}_m}{\partial x_k}, \mathbf{z}_m) - b(\frac{\partial\mathbf{u}_m}{\partial x_k}; \frac{\partial\boldsymbol{\omega}_m}{\partial x_k}, \mathbf{z}_m) + (\nabla u_{mk}\times\nabla\Delta u_{mk}, \mathbf{z}_m)] \\ & +2(P(\mathbf{u}_m.\nabla\Delta\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_m) - (P(\Delta(\mathbf{u}_m.\nabla\mathbf{u}_m)), \mathbf{w}_m)\} - \beta(P(\mathrm{div}(|A(\mathbf{u}_m)|^2A(\mathbf{u}_m))), \mathbf{w}_m) \\ & -\beta\{2(\nabla(|A(\mathbf{u}_m)|^2).\nabla\boldsymbol{\omega}_m, \mathbf{z}_m) + (\mathbf{B}(\mathbf{u}_m), \mathbf{z}_m)\} + \frac{\beta}{\alpha_1}\||A(\mathbf{u}_m)|\mathbf{z}_m\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & = (P(\mathbf{f}) + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) + (\mathbf{rot}(\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{u}_m) + \frac{\beta}{\alpha_1}|A(\mathbf{u}_m)|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}_m, \mathbf{z}_m). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nous sommes exactement dans la même situation que dans le Théorème 2.2 et la même démonstration donne (3.7).
△

Considérons une solution de (3.7) avec la valeur initiale

$$y(0) = \|\mathbf{u}_m(0)\|_{V_2}^2 = \|P_m(\mathbf{u}_0)\|_{V_2}^2.$$

Comme au Paragraphe I.5, si $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{f}$ satisfont (2.19), alors pour tout m suffisamment grand, $\mathbf{u}_m(0)$ et $\mathbf{f}$ satisferont l'analogue de (2.19):

$$\|\mathbf{u}_m(0)\|_{V_2}^2 + \frac{2\alpha_1^2 K_3 + C_2(\alpha_1)K_1}{2\alpha_1^2 K_1}(\|\mathbf{u}_m(0)\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt)$$
$$+\frac{2\alpha_1}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)}^2\, dt < \min\left(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}, \frac{K_1^2}{K_2^2}\right). \tag{3.10}$$

De là, la conclusion du Lemme 2.3 implique que $T_m^* = \infty$ et que $\mathbf{u}_m(t)$ est uniformément borné dans V_2 par rapport au temps:

$$\forall t \geq 0, \|\mathbf{u}_m(t)\|_{V_2} \leq \min\left(\sqrt{\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}}, \frac{K_1}{K_2}\right). \tag{3.11}$$

Alors l'équivalence de normes du Lemme II.1.10, (3.4) et (3.11) impliquent que la suite $\{\mathbf{u}_m\}_{m\geq 1}$ est bornée par rapport à m dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega)^3)\bigcap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)^3)$.

Le lemme suivant donne une borne pour $\mathbf{u}_m'(t)$.

Lemme 3.3 *Soient* $\mathbf{f}$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$ *et* $\mathbf{u}_0$ *dans* V_2. *Supposons que la suite* $\{\mathbf{u}_m\}_{m\geq 1}$ *soit bornée par rapport à* m *dans* $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega)^3) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)^3)$. *Alors la suite* $\{\mathbf{u}_m'\}_{m\geq 1}$ *est bornée par rapport à* m *dans* $L^2(\mathbb{R}^+; V)$.

Démonstration. Elle est identique à celle du Lemme V.3.3.
△

Le théorème suivant récapitule les majorations obtenues pour les suites $\{\mathbf{u}_m\}$ et $\{\mathbf{u}_m'\}$.

Théorème 3.4 *Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^3$, *de frontière* Γ *de classe* $C^{3,1}$. *Soient* $\mathbf{f}$ *donné dans* $L^2(\mathbb{R}^+; H(\mathbf{rot};\Omega))\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3)$ *et la vitesse initiale* $\mathbf{u}_0$ *donnée dans* V_2, *suffisamment petits pour satisfaire*

$$\|\mathbf{u}_0\|_{V_2}^2 + \frac{2\alpha_1^2 K_3 + C_2(\alpha_1)K_1}{2\alpha_1^2 K_1}(\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + \frac{\mathcal{P}^2}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt) + \frac{2\alpha_1}{\nu}\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|_{H(\mathbf{rot};\Omega)}^2\, dt$$
$$< \min\left(\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}, \frac{K_1^2}{K_2^2}\right), \tag{3.12}$$

avec $C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ *définie par (2.6),* K_3 *par (2.7) et* K_1 *et* K_2 *définies dans le Lemme 2.1. Alors pour tout* m *suffisamment grand, la solution unique* $\mathbf{u}_m$ *de la méthode de Galerkin*

(3.1), (3.2) existe pour tout temps $t \geq 0$ et satisfait les bornes supérieures:

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(I\!R^+;V_2)} &\leq \min\left(\sqrt{\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}}, \frac{K_1}{K_2}\right), \\
\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(I\!R^+;H^1(\Omega)^3)} &\leq k_1, \\
\|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(I\!R^+;V)} &\leq k_2,
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

où k_1 et k_2 sont des constantes indépendantes de m.

Il reste à passer à la limite par rapport à m. Il suit de la première et de la dernière inégalité dans (3.13) qu'il existe une fonction $\mathbf{u}$ et une sous-suite de $\{\mathbf{u}_m\}$, encore notée $\{\mathbf{u}_m\}$, telles que

$$
\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(\mathrm{I\!R}^+;V_2),
$$
$$
\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}'_m = \mathbf{u}' \text{ dans } L^2(\mathrm{I\!R}^+;H^1(\Omega)^3) \text{ faible.}
$$

De là, on passe à la limite dans (3.1) et on déduit que $\mathbf{u}$ est solution du problème (2.1), (V.1.9) et puisque cette solution est unique, la suite entière $\mathbf{u}_m$ converge vers $\mathbf{u}$. Ceci établit le principal théorème de ce paragraphe.

Théorème 3.5 *Sous les hypothèses du Théorème 3.4, le problème (2.1), (V.1.9) a une et une seule solution $\mathbf{u}$ qui existe pour tout temps $t \geq 0$. De plus, $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(I\!R^+;V_2)$, $\mathbf{u}'$ à $L^2(I\!R^+;V)$ et $\mathbf{u}$ est uniformément borné dans V_2 par rapport au temps:*

$$
\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(I\!R^+;V_2)} \leq \min\left(\sqrt{\frac{\nu}{2\alpha_1 C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)}}, \frac{K_1}{K_2}\right), \tag{3.14}
$$

où $C(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ est définie par (2.6) et K_1 et K_2 sont définies dans le Lemme 2.1.

4 Régularité

Comme dans le Paragraphe V.4, nous supposons que le problème (2.1), (V.1.9) a une solution $\mathbf{u}$ dans $L^\infty(0,T;V_2)$ avec $\mathbf{u}'$ dans $L^2(0,T;V)$, qui n'est pas nécessairement globale. On prend encore $\mathbf{f}$ et $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ dans $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$, la vitesse initiale $\mathbf{u}_0$ dans $H^4(\Omega)^3 \cap V$, la frontière $\Gamma = \bigcup_{i=0}^p \Gamma_i$ (Γ_i connexe) de classe $C^{3,1}$ et Ω domaine borné de $\mathrm{I\!R}^3$. Comme au Chapitre II, pour étudier la régularité, nous aurons besoin de supposer que Ω vérifie l'Hypothèse II.1.4. Nous nous proposons à nouveau de montrer que $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ appartient à $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$. Etant donné le Lemme II.3.1, cela implique que $\mathbf{u}$ est dans $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$. En fait, la méthode de ce paragraphe est générale et peut être appliquée pour déduire toute régularité pour $\mathbf{u}$.

Le plan du paragraphe est le suivant. Outre les deux applications $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$, introduites dans le Paragraphe II.4.1, on définit deux autres applications, notées $\mathbf{l}$ et $\mathbf{s}$. Ensuite, en utilisant les applications $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$,$\mathbf{l}$ et $\mathbf{s}$, nous déduirons de (V.2.16) une équation de transport, dont $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$ est une solution dans $L^2(0,T; L^2(\Omega)^3)$. Puis on montre que cette équation a une solution dans $L^\infty(0,T; H^1(\Omega)^3)$ et on remarque que la démonstration d'unicité dans $L^2(0,T; L^2(\Omega)^3)$, dans le cas Ω simplement connexe du Paragraphe V.4.3, s'applique ici presque sans changement. On déduit alors que la solution $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})$ est dans $L^\infty(0,T; H^1(\Omega)^3)$, ce qui implique que $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T; H^4(\Omega)^3)$.

4.1 Une équation de transport

On définit $\mathbf{l}$ et $\mathbf{s}$ comme suit:

$$\forall \mathbf{z} \in L^2(\Omega)^3, \ \mathbf{l}(\mathbf{z}) = \mathbf{v_z} \tag{4.1}$$

et

$$\forall \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3, \ \mathbf{s}(\mathbf{u}) = \mathbf{v_u}, \tag{4.2}$$

où $\mathbf{v_z}$ et $\mathbf{v}_u$ sont définis dans le Paragraphe II.4.1. On peut remarquer que, par définition, $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{rot}\, \mathbf{l}(\mathbf{z})$ et $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{rot}\, \mathbf{s}(\mathbf{u})$.

Des démonstrations des Lemmes II.4.1, II.4.2 et II.4.3, on déduit les trois lemmes suivants.

Lemme 4.1 *Soient* $\mathbf{l}$ *défini par (4.1) et* $\mathbf{s}$ *défini par (4.2). Si* $\mathbf{u} \in V_2$*, alors*

$$\mathbf{l}(\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1 \Delta \mathbf{u})) + \mathbf{s}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}.$$

Lemme 4.2 *Soit m un entier naturel. Supposons, en plus des hypothèses du Lemme II.1.10, que le domaine Ω vérifie l'Hypothèse II.1.4 et que Γ soit de classe $C^{m+2,1}$. Alors l'application* $\mathbf{l}$*, définie sur $L^2(\Omega)^3$ par (4.1), est un opérateur continu de $H^m(\Omega)^3$ dans $H^{m+3}(\Omega)^3$.*

Lemme 4.3 *Sous les hypothèses du Lemme 4.2, l'application* $\mathbf{s}$*, définie sur $H^2(\Omega)^3$ par (4.2), est un opérateur continu de $H^2(\Omega)^3$ dans $H^{m+3}(\Omega)^3$.*

Des Lemmes II.4.2, II.4.3, 4.2 et 4.3, on déduit l'existence de quatre constantes C', C'', K' et K'' telles que

$$\forall \mathbf{z} \in L^2(\Omega)^3, \ \|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|_{H^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} C' \|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.3}$$

$$\forall \mathbf{z} \in H^1(\Omega)^3, \ \|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|_{H^3(\Omega)} \leq \sqrt{2} C'' \|\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)}, \tag{4.4}$$

$$\forall \mathbf{z} \in L^2(\Omega)^3, \ \|\mathbf{l}(\mathbf{z})\|_{H^3(\Omega)} \leq C' \|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.5}$$

$$\forall \mathbf{z} \in H^1(\Omega)^3, \ \|\mathbf{l}(\mathbf{z})\|_{H^4(\Omega)} \leq C'' \|\mathbf{z}\|_{H^1(\Omega)}, \tag{4.6}$$

$$\forall \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3, \ \|\mathbf{h}(\mathbf{u})\|_{H^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} K' \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}, \tag{4.7}$$

$$\forall \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3, \ \|\mathbf{h}(\mathbf{u})\|_{H^3(\Omega)} \leq \sqrt{2} K'' \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}, \tag{4.8}$$

$$\forall \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3, \ \|\mathbf{s}(\mathbf{u})\|_{H^3(\Omega)} \leq K' \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} \tag{4.9}$$

et

$$\forall \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3,\ \|\mathbf{s}(\mathbf{u})\|_{H^4(\Omega)} \leq K''\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}. \tag{4.10}$$

Remarquons que les constantes C' et C'' définies ici sont celles du Paragraphe II.4 à un facteur $1/\sqrt{2}$ près.

Nous allons récrire $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ à l'aide des applications $\mathbf{l}$ et $\mathbf{s}$. A partir de (V.2.10), on obtient

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = 2\sum_{i,j,k=1}^{3}[\nabla(A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial}{\partial x_k}(A_{ij}(\mathbf{u}))) \times A_{.,k}(\mathbf{u}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(A_{ij}(\mathbf{u}))A_{ij}(\mathbf{u})\nabla((\mathbf{rot}\,\mathbf{u})_k)].$$

Posons alors, pour tout $\mathbf{u}$, tout $\mathbf{v}$ et tout $\mathbf{w}$ dans V_2,

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = 2\sum_{i,j,k=1}^{3}[\nabla(A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial}{\partial x_k}(A_{ij}(\mathbf{w})) \times A_{.,k}(\mathbf{v}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(A_{ij}(\mathbf{u}))A_{ij}(\mathbf{v})\nabla((\mathbf{rot}\,w)_k)]. \tag{4.11}$$

On peut remarquer que, pour $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans V_2 et $\mathbf{z}$ dans $L^2(\Omega)^3$,

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{l}(\mathbf{z})) = \mathbf{L}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z}), \tag{4.12}$$

où $\mathbf{L}$ est défini par (V.4.8). De plus, le Lemme 4.1 implique, pour tout $\mathbf{u}$ dans V_2,

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{l}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{s}(\mathbf{u})) = \mathbf{L}_1(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{u}) = \mathbf{B}(\mathbf{u}), \tag{4.13}$$

où $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{u}$.

Puisque nous savons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1), (V.1.9) existe, le Lemme II.4.1 et l'égalité (4.13) nous conduisent à résoudre l'équation de transport suivante, obtenue à partir de l'équation (V.4.7), en remplaçant $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ par $\mathbf{L}_1(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{l}(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{s}(\mathbf{u}))$, puis $\boldsymbol{\omega} - \alpha_1\Delta\boldsymbol{\omega}$ par $\mathbf{z}$ et $\boldsymbol{\omega}$ par $\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mathbf{h}(\mathbf{u})$:

Pour $\mathbf{u}$ donné dans $L^\infty(0,T;V_2)$, $\mathbf{u}_0$ donné dans $H^4(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ donné tel que $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartienne à $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$, chercher $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ solution de:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{z} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{z} - \frac{3\alpha_1 + 2\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{z}.\nabla\mathbf{u} + (\alpha_1+\alpha_2)[\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})\\
&-\frac{1}{\alpha_1}\mathbf{z}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + 2\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}))]\\
&+\frac{\beta}{\alpha_1}|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{z} - 2\beta\,\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\,\mathbf{g}(\mathbf{z}) - \beta\,\mathbf{L}_1(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{l}(\mathbf{z}))\\
&= \mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u} - 2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} + \frac{\beta}{\alpha_1}|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\\
&-2(\alpha_1+\alpha_2)\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{h}(\mathbf{u}).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{h}(\mathbf{u}) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u}))\\
&-(\alpha_1+\alpha_2)\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{h}(\mathbf{u}).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}) + 2\beta\,\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\,\mathbf{h}(\mathbf{u}) + \beta\,\mathbf{L}_1(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{s}(\mathbf{u})), \quad (4.14)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{rot}(\mathbf{u}_0 - \alpha_1\Delta\mathbf{u}_0). \tag{4.15}$$

Rappelons que, par construction de (4.14), $\mathbf{u}$ étant solution dans $L^\infty(0,T;V_2)$ de (2.1), (V.1.9), avec $\mathbf{u}'$ dans $L^2(0,T;V)$, alors $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} - \alpha_1\Delta\mathbf{u})$ est solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ de (4.14), (4.15).

4.2 Existence de solution dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et unicité de la solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ de l'équation de transport

Pour simplifier les notations, on utilise la notation $\mathbf{r}(\mathbf{u})$, définie par (II.4.7). On discrétise le problème (4.14), (4.15) de manière analogue au Paragraphe I.6.3, les fonctions propres $\mathbf{w}_j$ étant définies par l'équation (I.6.13). Ainsi, avec la notation (II.4.7), le problème discrétisé s'écrit:

Chercher

$$\mathbf{z}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{j,m}(t)\mathbf{w}_j,$$

solution, pour $1 \le j \le m$, de

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{z}'_m(t),\mathbf{w}_j) + \frac{\nu}{\alpha_1}(\mathbf{z}_m(t),\mathbf{w}_j) + b(\mathbf{u}(t);\mathbf{z}_m(t),\mathbf{w}_j)\\
&-\frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{\alpha_1} b(\mathbf{z}_m(t);\mathbf{u}(t),\mathbf{w}_j) + (\alpha_1+\alpha_2)\{(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t)),\mathbf{w}_j)\\
&-\frac{1}{\alpha_1}(\mathbf{z}_m(t)\times \mathbf{rot}\ \mathbf{u}(t),\mathbf{w}_j) + 2\sum_{k=1}^{3}[b(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t));\frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_k},\mathbf{w}_j)\\
&-b(\frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_k};\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)),\mathbf{w}_j) - (\frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_k}\times\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)),\mathbf{w}_j)]\}\\
&+\beta(\frac{1}{\alpha_1}|A(\mathbf{u}(t))|^2\mathbf{z}_m(t) - 2\nabla(|A(\mathbf{u}(t))|^2).\nabla\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m(t)) - \mathbf{L}_1(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{l}(\mathbf{z}_m(t))),\mathbf{w}_j)\\
&= (\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t) + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t) - 2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t).\nabla\mathbf{u}(t) + \frac{\beta}{\alpha_1}|A(\mathbf{u}(t))|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}(t),\mathbf{w}_j)\\
&+((\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{r}(\mathbf{u}(t)) + \beta(\mathbf{L}_1(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{s}(\mathbf{u}(t))) + 2\nabla(|A(\mathbf{u}(t))|^2).\nabla\,\mathbf{h}(\mathbf{u}(t)),\mathbf{w}_j), \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{z}_m(0) = P_m(\mathbf{z}(0)). \qquad (4.17)$$

Le problème (4.16), (4.17) est un système de m équations différentielles linéaires d'ordre un avec une condition initiale au temps $t=0$. Il est du même type que le système (I.6.14), (I.6.15) et il admet une solution $\mathbf{z}_m(t)$, unique et continue sur tout l'intervalle $[0,T]$.

Lemme 4.4 *Supposons que* $\mathbf{u}$ *appartienne à* $L^\infty(0,T;V_2)$ *et que* $\mathbf{f}$ *soit tel que* $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ *appartienne à* $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$. *Alors la solution* $\mathbf{z}_m(t)$ *de (4.16), (4.17) est bornée comme suit:*

$$\forall t \in [0,T],\ \ \|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \le e^{K_T t}(\|\mathbf{z}_m(0)\|_{H^1(\Omega)} + C_T), \qquad (4.18)$$

où K_T *et* C_T *sont deux constantes qui dépendent de* T, *mais non de* m.

Démonstration. Multipliant les deux membres de (4.16) par $\lambda_j c_{j,m}(t)$, appliquant (I.6.13) et sommant par rapport à j, on obtient, après avoir supprimé la variable t pour simplifier les notations,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{z}_m\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{z}_m\|^2_{H^1(\Omega)} + (\nabla(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{z}_m),\nabla\mathbf{z}_m) - \frac{3\alpha_1+2\alpha_2}{\alpha_1}[(\nabla(\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u}),\nabla\mathbf{z}_m)\\
&+(\mathbf{z}_m.\nabla\mathbf{u},\mathbf{z}_m)] + (\alpha_1+\alpha_2)\{(\nabla(\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u})),\nabla\mathbf{z}_m) + (\nabla(\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\mathbf{rot}\,\mathbf{u}),\mathbf{z}_m)
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\alpha_1}(\nabla(\mathbf{z}_m \times \mathbf{rot}\,\mathbf{u}), \nabla\mathbf{z}_m) + 2\sum_{k=1}^{3}[(\nabla(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}), \nabla\mathbf{z}_m)$$
$$+(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m).\nabla\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}, \mathbf{z}_m) - (\nabla(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)), \nabla\mathbf{z}_m) - (\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k}.\nabla\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{g}(\mathbf{z}_m), \mathbf{z}_m)$$
$$-(\nabla(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \times \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)), \nabla\mathbf{z}_m) - (\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \times \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{rot}\,\mathbf{g}(\mathbf{z}_m), \mathbf{z}_m)]\}$$
$$+\beta[\frac{1}{\alpha_1}(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{z}_m), \nabla\mathbf{z}_m) + \frac{1}{\alpha_1}(|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_m) - 2(\nabla(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m)), \nabla\mathbf{z}_m)$$
$$-2(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{g}(\mathbf{z}_m), \mathbf{z}_m) - (\nabla(\mathbf{L}_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{l}(\mathbf{z}_m))), \nabla\mathbf{z}_m) - (\mathbf{L}_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{l}(\mathbf{z}_m)), \mathbf{z}_m)]$$
$$= (\mathbf{rot}\,\mathbf{f} + \frac{\nu}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u} - 2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} + \frac{\beta}{\alpha_1}|A(\mathbf{u})|^2\mathbf{rot}\,\mathbf{u}, \mathbf{z}_m)_{H^1(\Omega)}$$
$$+((\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{r}(\mathbf{u}) + \beta(\mathbf{L}_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{s}(\mathbf{u})) + 2\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\,\mathbf{h}(\mathbf{u})), \mathbf{z}_m)_{H^1(\Omega)}. \tag{4.19}$$

Remarquons tout d'abord que, compte tenu de (4.12), l'équation précédente a le même premier membre que l'équation (V.4.15). Nous pouvons donc utiliser, d'une part les majorations (I.6.18)-(I.6.30), dans lesquelles on a remplacé C' et C'' par, respectivement, $\sqrt{2}C'$ et $\sqrt{2}C''$, et d'autre part les majorations (V.4.17), (V.4.22), (V.4.23), (V.4.24) et (V.4.39). Ainsi nous obtenons les mêmes constantes K_1 et K_2, données par (V.4.44), qu'au Paragraphe V.4.2. Cependant, par rapport à ce qui a été fait dans ce paragraphe, il y a, dans le membre de droite de (4.19), quelques termes supplémentaires à majorer. Le premier terme à majorer est

$$|(\mathbf{r}(\mathbf{u}), \mathbf{z}_m)_{H^1(\Omega)}|.$$

De la majoration (II.4.24), dans laquelle , compte tenu de (4.7) et (4.8), K' est remplacée par $\sqrt{2}\,K'$ et K'' par $\sqrt{2}\,K''$, on déduit

$$|(\mathbf{r}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{z}_m(t))_{H^1(\Omega)}|$$
$$\leq 4(2\sqrt{2}+1)(C_1 + C_2^{3/2})\sqrt{K'^2 + K''^2}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.20}$$

Considérons le deuxième terme $|(\mathbf{L}_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{s}(\mathbf{u})), \mathbf{z}_m)_{H^1(\Omega)}|$. Par des calculs analogues à ceux effectués pour établir (V.4.22), utilisant (4.9) au lieu de (4.5), on obtient

$$|(\mathbf{L}_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{s}(\mathbf{u})), \mathbf{z}_m)| \leq\ 8\,C_1K'(2C_1 + (2+\sqrt{2})C_2^{3/2})\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}\|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.21}$$

De manière analogue à (V.4.25), on développe $\nabla(\mathbf{L}_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{s}(\mathbf{u})))$. Cela donne

$$\nabla(\mathbf{L}_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{s}(\mathbf{u}))) = 2\sum_{i,j,k=1}^{3}[\nabla(\nabla\,(A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{s}(\mathbf{u}))) \times A_{.,k}(\mathbf{u}))$$
$$-\nabla(\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k}A_{ij}(\mathbf{u})\nabla\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{s}(\mathbf{u}))_k)]. \tag{4.22}$$

Par des calculs analogues à ceux effectués pour établir (V.4.34), utilisant (4.10) au lieu de (4.6), on obtient

$$|(\sum_{i,j,k=1}^{3} \nabla(\nabla\,(A_{ij}(\mathbf{u})\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{s}(\mathbf{u}))) \times A_{.,k}(\mathbf{u})), \nabla\,\mathbf{z}_m)|$$
$$\leq 16\sqrt{2}(C_1 + C_2^{3/2})^2 K'' \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)} |\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.23}$$

De même, de manière analogue à (V.4.38), utilisant

$$\|\mathbf{rot}\,\mathbf{s}(\mathbf{u})\|_{H^3(\Omega)} = \|\mathbf{h}(\mathbf{u})\|_{H^3(\Omega)} \leq \sqrt{2}\,K''\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)},$$

au lieu de (V.4.4), on obtient

$$|\sum_{i,j,k=1}^{3} (\nabla(\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_k} A_{ij}(\mathbf{u}) \nabla\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{s}(\mathbf{u}))_k), \nabla\,\mathbf{z}_m)|$$
$$\leq 4\sqrt{2} C_1 (C_1 + 2C_2^{3/2}) K'' \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)} |\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.24}$$

Alors (4.22), (4.23) et (4.24) donnent

$$|(\nabla(\mathbf{L}_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{s}(\mathbf{u}))), \nabla\,\mathbf{z}_m)|$$
$$\leq 8\sqrt{2}(C_1(C_1 + 2C_2^{3/2}) + 4(C_1 + C_2^{3/2})^2) K'' \|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} |\mathbf{z}_m|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.25}$$

Finalement, majorant $C_1(C_1 + 2C_2^{3/2})$ par $2(C_1 + C_2^{3/2})^2$, on déduit de (4.21) et (4.25)

$$|(\mathbf{L}_1(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{s}(\mathbf{u}(t))), \mathbf{z}_m(t))_{H^1(\Omega)}|$$
$$\leq 48\,\sqrt{2}(C_1 + C_2^{3/2})^2 \sqrt{K'^2 + K''^2} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)} \|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)} \|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.26}$$

Ensuite (cf. (V.4.17)), utilisant (4.7) au lieu de (4.3), on obtient

$$|(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{h}(\mathbf{u}), \mathbf{z}_m)| \leq 8\sqrt{2} C_1 C_2^{3/2} K' \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)} \|\mathbf{z}_m\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.27}$$

Enfin, la majoration (V.4.24), avec (4.8) au lieu de (4.4), donne

$$|(\nabla(\nabla(|A(\mathbf{u})|^2).\nabla\mathbf{h}(\mathbf{u})), \nabla\,\mathbf{z}_m)|$$
$$\leq 8\sqrt{2}\,C_1 K''(2C_2^{3/2} + C_1) \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\Omega)} |\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.28}$$

Majorant $C_2^{3/2}$ et $2C_2^{3/2} + C_1$ par $2(C_1 + C_2^{3/2})$, on obtient

$$|(\nabla(|A(\mathbf{u}(t))|^2).\nabla\mathbf{h}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{z}_m(t))_{H^1(\Omega)}|$$
$$\leq 16\sqrt{2} C_1 (C_1 + C_2^{3/2}) \sqrt{K'^2 + K''^2} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(\Omega)} \|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)} \|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.29}$$

Comme nous l'avons remarqué au début de la démonstration, l'équation (4.19) par rapport à l'équation (V.4.15), a seulement quelques termes supplémentaires dans le membre de droite. Aussi, substituant les majorations obtenues dans la démonstration du Lemme V.4.2, ainsi que les majorations supplémentaires (4.20), (4.26) et (4.29), utilisant les inégalités

$$|\mathbf{z}_m(t)|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{z}_m(t)\|_{H(\Omega)} \leq \frac{1}{2}(|\mathbf{z}_m(t)|^2_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{z}_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)}),$$

$$\sqrt{K'^2 + K''^2} \leq K' + K''$$

et simplifiant par $\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}$, nous déduisons

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq (K_1 + K_2\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)})\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)}\|\mathbf{z}_m(t)\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{f}(t)\|_{H^1(\Omega)}$$
$$+\frac{\sqrt{2}\nu}{\alpha_1}\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\Omega)} + 4|\alpha_1 + \alpha_2|(\frac{\sqrt{2}\,C_1}{\alpha_1} + (2\sqrt{2}+1)(C_1 + C_2^{3/2})(K' + K''))\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^3(\Omega)}$$
$$+4\beta[3\sqrt{2}\frac{C_1^2}{\alpha_1} + 4\sqrt{2}(C_1 + C_2^{3/2})(5C_1 + 3C_2^{3/2})(K' + K'')]\|\mathbf{u}(t)\|^3_{H^3(\Omega)}.$$

avec K_1 et K_2 définies par (V.4.44). D'où (4.18) suit avec

$$K_T = (K_1 + K_2\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)})\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)}$$

et

$$\begin{aligned}C_T = {} & \|\mathbf{rot}\ \mathbf{f}\|_{L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)} + T\,K_3\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)} \\ & +T\,K_4\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)} + T\,K_5\|\mathbf{u}\|^3_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega)^3)},\end{aligned}$$

avec

$$K_3 = \frac{\sqrt{2}\nu}{\alpha_1},\ K_4 = 4|\alpha_1 + \alpha_2|(\frac{\sqrt{2}C_1}{\alpha_1} + (2\sqrt{2}+1)(C_1 + C_2^{3/2})(K' + K''))$$

et

$$K_5 = 4\beta[3\sqrt{2}\frac{C_1^2}{\alpha_1} + 4\sqrt{2}(C_1 + C_2^{3/2})(5C_1 + 3C_2^{3/2})(K' + K'')].$$

$\triangle$

Il découle de (4.18) que la suite $\{\mathbf{z}_m\}$ est uniformément bornée par rapport à m dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$. De là, il existe une fonction $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et une sous-suite de $\{\mathbf{z}_m\}$, encore notée $\{\mathbf{z}_m\}$, telles que

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{z}_m = \mathbf{z} \quad \text{faible} * \text{ dans } L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3).$$

Comme dans le Paragraphe I.6.3, puisque le problème est linéaire, nous pouvons passer à la limite dans (4.16), (4.17) et montrer que $\mathbf{z}$ satisfait (4.14), (4.15). Nous avons donc prouvé le théorème suivant.

Théorème 4.5 *Supposons que Ω soit un domaine borné de $I\!R^3$, vérifiant l'Hypothèse II.1.4, avec une frontière Γ de classe $C^{3,1}$. Si $\mathbf{u}$ est donné dans $L^\infty(0,T;V_2)$, $\mathbf{u}_0$ dans $H^4(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ tel que $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartienne à $L^1(0,T;H^1(\Omega)^3)$, alors le problème (4.14), (4.15) a au moins une solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$.*

Remarque 4.6 *Comme dans les cinq chapitres précédents, les arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 4.5 peuvent être généralisés à un quelconque $m \geq 1$. Si Γ est de classe $C^{m+2,1}$, si $\mathbf{u}$ est donné dans $L^\infty(0,T;V_2 \bigcap H^{m+2}(\Omega)^3)$, $\mathbf{u}_0$ dans $H^{m+3}(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ tel que $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ appartienne à $L^1(0,T;H^m(\Omega)^3)$, alors le problème (4.14), (4.15) a au moins une solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^m(\Omega)^3)$.*

La démonstration de l'unicité de la solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ pour le problème (4.14), (4.15) est presque identique à celle du Paragraphe V.4.3. En effet, soient $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_2$ deux solutions de (4.14), (4.15). Posons $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2$. Alors $\boldsymbol{\zeta}$ satisfait l'équation (V.4.45), puisque, compte tenu de (4.12), seul le second membre est différent quand on compare (4.14) et (V.4.10). Il suffit alors de substituer $C_2(\alpha_1)$ à $C(\alpha_1)$, partout où cette dernière constante intervient dans le Paragraphe V.4.3.

4.3 Conclusion

Le problème (4.14), (4.15) a une solution $\mathbf{z}$ dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et n'a pas plus d'une solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ (cf. Paragraphe 4.2). D'autre part, à la fin du Paragraphe 4.1, on a remarqué que $\mathbf{rot}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})$ est solution dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ de (4.14), (4.15). Donc, $\mathbf{z} = \mathbf{rot}(\mathbf{u}-\alpha_1\Delta\mathbf{u})$ appartient à $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^3)$ et, par suite du Lemme II.3.1, cela implique que $\mathbf{u}$ est dans $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$. Nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème 4.7 *Supposons que Ω soit un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, vérifiant l'Hypothèse II.1.4. Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (V.1.6)-(V.1.10) appartienne à $L^\infty(0,T;V_2)$. Si la frontière Γ est de classe $C^{3,1}$ et si les données ont la régularité:*

$$\mathbf{u}_0 \in H^4(\Omega)^3 \cap V \ , \ \mathbf{f} \in L^1(0,T;H^1(\Omega)^3) \ , \ \mathbf{rot}\,\mathbf{f} \in L^1(0,T;H^1(\Omega)^3) \ , \tag{4.30}$$

alors $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T;H^4(\Omega)^3)$.

Suivant la Remarque 4.6, l'énoncé du Théorème 4.7 peut être généralisé par induction à tout $m \geq 1$ pour donner le résultat suivant. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, vérifiant l'Hypothèse II.1.4 avec une frontière Γ de classe $C^{m+2,1}$ et supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (V.1.6)-(V.1.10) appartienne à $L^\infty(0,T;V_2)$. Si la vitesse initiale $\mathbf{u}_0$ est donnée dans $H^{m+3}(\Omega)^3 \cap V$ et $\mathbf{f}$ dans $L^1(0,T;H^m(\Omega)^3)$ avec $\mathbf{rot}\ \mathbf{f}$ dans $L^1(0,T;H^m(\Omega)^3)$, alors $\mathbf{u}$ appartient à $L^\infty(0,T;H^{m+3}(\Omega)^3)$. La démonstration est analogue à celle faite au Paragraphe II.4 pour les fluides de grade 2. On prend encore pour base, les fonctions propres du problème

$$\forall \mathbf{v} \in H^m(\Omega)^3 \ , \ ((\mathbf{w}_j,\mathbf{v}))_m = \lambda_j(\mathbf{w}_j,\mathbf{v}) \ ,$$

où $((.,.))_m$ représente le produit scalaire de $H^m(\Omega)^3$.

Références bibliographiques

[1] Adams, R. *Sobolev Spaces*, Academic Press, New-York (1975).

[2] Amrouche, C. *Etude Globale des Fluides de Troisième Grade, Thèse 3ème cycle*, Université Pierre et Marie Curie (1986).

[3] Amrouche, C., Bernardi, C., Dauge, M. & Girault, V. "Vector potentials in Three-Dimensional Nonsmooth Domains", preprint 1996, to appear in Math. Meth. in Appl. Sciences.

[4] Amrouche, C. & Cioranescu, D. "On a class of fluids of grade 3", Int. J. Non-linear Mechanics, **32**, 1, 73-88 (1997).

[5] Brezis, H. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications*, Masson, Paris (1992).

[6] Ciarlet, P.G. *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation*, Masson, Paris (1990).

[7] Cioranescu, D. & Girault, V. "Weak and classical solutions of a family of second grade fluids", Int. J. Non-linear Mechanics, **32**, 2, 317-335 (1997).

[8] Cioranescu, D. & Ouazar, E.H. "Existence et unicité pour les fluides de second grade", Note CRAS **298** Série I, 285-287 (1984).

[9] Cioranescu, D. & Ouazar, E.H. "Existence and uniqueness for fluids of second grade", in Nonlinear Partial Differential Equations, Collège de France Seminar, Pitman **109** 178-197 (1984).

[10] Coddington, E.A. & Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw Hill, New York (1955).

[11] Crouzeix, M. & Mignot, A.L. *Analyse Numérique des Equations Différentielles*, Masson, Paris (1989).

[12] Dunn, J.E. & Fosdick, R.L. "Thermodynamics, stability and boundedness of fluids of complexity two and fluids of second grade", Arch. Rat. Mech. Anal. **56**, 3, 191-252 (1974).

[13] Dunn, J.E. & Rajagopal, K.R. "Fluids of differential type: Critical review and thermodynamic analysis", Int. J. Eng. Sci. **33** , 5, 689-729 (1995).

[14] Duvaut, G. & Lions, J.L. *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris (1972).

[15] Fosdick, R.L. & Rajagopal, K.R. "Anomalous features in the model of second order fluids", Arch. Rat. Mech. Anal. **70**, 3, 1-46 (1979).

[16] Fosdick, R.L. & Rajagopal, K.R. "Thermodynamics and stability of fluids of third grade", Proc. Royal Soc. London **A 339**, 351-377 (1980).

[17] Fosdick, R.L. & Straughan, B. "Catastrophic instabilities and related results in a fluid

of third grade", Int. J. Non-Linear Mechanics. **16**, 2, 191-198 (1981).

[18] Galdi, G.P., Grobbelaar-Van Dalsen M., & Sauer, N. "Existence and uniqueness of classical solutions of the equations of motion for second grade fluids", Arch. Rat. Mech. Anal. **124**, 221-237 (1993).

[19] Galdi, G.P. & Sequeira, A. "Further existence results for classical solutions of the equations of second grade fluids", Arch. Rat. Mech. Anal. **128**, 297-312 (1994).

[20] Girault, V. & Raviart, P.A. *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equation,* Lect. Notes in Math. vol. 749, Springer-Verlag, Berlin (1979).

[21] Girault, V. & Raviart, P.A. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equation. Theory and Algorithms,* SMC **5**, Springer-Verlag, Berlin (1986).

[22] Lions, J.L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires,* Dunod, Paris (1969).

[23] Lions, J.L. & Magenes, E. *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications,* Vol. I, Dunod, Paris (1970).

[24] Nečas, J. *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris (1967).

[25] Noll, W. "A new mathematical theory of simple materials", Arch. Rat. Mech. Anal. **48**, 1 (1972).

[26] Noll, W. & Truesdell, C. *The Nonlinear Field Theory of Mechanics. Handbuch of Physik,* Vol. III, Springer-Verlag, Berlin (1975).

[27] Ouazar, E.H. *Sur les Fluides de Second Grade, Thèse 3ème Cycle,* Université Pierre et Marie Curie (1981).

[28] Padden, F.J. & Dewitt, W. "Some rheological properties of concentrated polyisobulytene solutions", J. Appl. Phys. **25**, 1086-1091 (1955).

[29] Rajagopal, K.R. *Thermodynamics and Stability of Non-Newtonian Fluids, Ph. D. thesis,* University of Minnesota (1978).

[30] Raviart, P.A. & Thomas, J.M. *Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles,* Masson, Paris (1988).

[31] Rivlin, R.S. & Ericksen, J.L. "Stress deformation relation for isotropic materials", J. Rat. Mech. Anal. **4**, 323-425 (1955).

[32] Rudin, W. *Analyse Réelle et Complexe,* Masson, Paris (1975).

[33] Temam, R. "On the Euler equations of incompressible perfect fluids", J. Funct. Anal. **20**, 32-43 (1975).

[34] Temam, R. *Navier-Stokes Equations,* North-Holland, Amsterdam (1977).